Část I.

Elementární úvod do lineární algebry

Mgr. David Zoul

2011


FACULTAS MATHEMATICA PHYSICAQUE

Obsah

Grupoiy a grupy

1) Definice grupoidu

Neprázdná množina *G*, opatřená binární operací, se nazývá grupoid.

2) Definice neutrálního prvku

Prvek *e* grupoidu *G* se nazývá levým, resp. pravým neutrálním prvkem tohoto grupoidu, jestliže platí:

$$\forall a \in G : ea = a \text{ resp. } ae = a. \qquad (1)$$

Prvek *e*, který je současně levým i pravým neutrálním prvkem grupoidu *G*, se nazývá neutrální prvek grupoidu *G*.

3) Definice inverzního prvku

Nechť *G* je grupoid s neutrálním prvkem *e*. Prvek $b \in G$ nazveme levým, resp. pravým inverzním prvkem k prvku $a \in G$, jestliže

$$ba = e \text{ resp. } ab = e. \qquad (2)$$

Je-li *b* současně levým i pravým inverzním prvkem k prvku *a*, pak *b* nazveme inverzním prvkem k *a*.

4) Definice invertibilního prvku

Prvek $a \in G$ se nazývá zleva, resp. zprava invertibilním, jestliže k němu existuje alespoň jeden levý, resp. pravý inverzní prvek.

5) Definice anihilujícího prvku

Prvek *z* grupoidu *G* nazveme levým, resp. pravým anihilujícím prvkem, jestliže platí:

$$\forall a \in G : za = z \text{ resp. } az = z . \qquad (3)$$

Prvek, který je současně levým i pravým anihilujícím prvkem grupoidu *G*, nazýváme anihilující prvek grupoidu *G*.

6) Definice kratitelného prvku

Nechť $a \in G$. Říkáme, že prvek *a* je zleva, resp. zprava kratitelným prvekm grupoidu *G*, jestliže

$$\forall b, c \in G, b \neq c : ab \neq ac \text{ resp. } ba \neq ca . \qquad (4)$$

Jestliže *a* je současně zleva i zprava kratitelným prvkem, pak říkáme, že *a* je kratitelný prvek grupoidu *G*.

7) Definice grupoidu s krácením

Říkáme, že *G* je grupoid s levým resp. pravým krácením, jestliže každý jeho prvek je zleva, resp. zprava kratitelný. Jestliže *G* má obě tyto vlastnosti, pak říkáme, že *G* je grupoid s krácením.

8) Definice dělícího prvku

Nechť $a, b \in G$. Říkáme, že prvek *a* dělí *b* zleva resp. zprava, jestliže

$$\exists c \in G : ac = b \text{ resp. } ca = b . \qquad (5)$$

Říkáme, že *a* je zleva resp. zprava dělícím prvkem grupoidu *G*, jestliže *a* dělí zleva resp. zprava každý prvek grupoidu *G*.

9) Definice grupoidu s dělením

Říkáme, že *G* je grupoid s levým, resp. pravým dělením, jestliže každý jeho prvek je zleva, resp. zprava dělící. Jestliže *G* má obě tyto vlastnosti, pak říkáme, že *G* je grupoid s dělením.

10) Definice idempotentního prvku

Prvek *a* grupoidu *G* se nazývá idempotent, jestliže platí

$$aa = a. \qquad (6)$$

11) Definice idempotentního grupoidu

Grupoid *G* se nazývá idempotentním grupoidem, jestliže každý jeho prvek je idempotent.

12) Definice podgrupoidu

Neprázdná podmnožina $H \subseteq G$ se nazývá podgrupoidem grupoidu *G*, jstliže množina *H* je uzavřená vzhledem k operaci v *G*, tj.

$$\forall a,b \in G : ab \in H. \qquad (7)$$

To znamená, že *H* spolu s restrikcí operace grupoidu *G* je rovněž grupoidem.

13) Definice kvazigrupy

Grupoid, který je současně s krácením i s dělením, se nazývá kvazigrupa.

14) Definice lupy

Kvazigrupa s neutrálním prvkem se nazývá lupa

15) Definice komutativního grupoidu

Říkáme, že *G* je komutativní grupoid, platí-li v něm tzv. komutativní zákon:

$$\forall a,b \in G : ab = ba . \qquad (8)$$

16) Definice pologrupy

Říkáme, že grupoid *G* je pologrupou, platí-li v něm tzv. asociativní zákon:

$$\forall a,b,c \in G : a(bc) = (ab)c . \qquad (9)$$

17) Definice monoidu

Pologrupa s neutrálním prvkem se nazývá monoid

18) Definice grupy

Kvazigrupa, která je současně monoidem, se nazývá grupou.

19) Definice abelovské grupy

Grupa, která je současně komutativním grupoidem se nazývá abelovskou grupou.

20) Definice podgrupy

Neprázdná podmnožina $H \subseteq G$ se nazývá podgrupou grupy *G*, jstliže množina *H* je uzavřená vzhledem k operaci v *G*, tj.

$$\forall a,b \in G : ab \in H . \qquad (10)$$

To znamená, že *H* spolu s restrikcí operace grupy *G* je rovněž grupou.

Okruhy a tělesa

1) Definice okruhu

Množinu O se dvěma binárními operacemi $+,\cdot$, nazveme okruhem, platí-li v ní

1) $a+b=b+a$	(komutativita součtu)
2) $(a+b)+c=a+(b+c)$	(asociativita součtu)
3) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$	(asociativita součinu)
4) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	(distributivní zákon)
5) $\exists 0: a+0=0+a=a$	(neutrální prvek součtu)
6) $\forall b \exists a: a+b=b+a=0$	(inverzní prvek součtu)
7) $\exists 1: a\cdot 1=1\cdot a=a$	(neutrální prvek součinu)
8) $\exists 0: a\cdot 0=0\cdot a=0$	(anihilující prvek součinu)

2) Definice algebraického tělesa

Okruh nazveme algebraickým tělesem, pakliže platí

$\forall a\in O\setminus\{0\}\exists! b\in O: a\cdot b=b\cdot a=1$ (inverzní prvek součinu)

3) Definice komutativního tělesa

Algebraické těleso T nazveme komutativním tělesem, pokud

$\forall a,b\in T: a\cdot b=b\cdot a$ (komutativita součinu)

Poznámka: v tělesech požíváme zpravidla zjednodušené termíny pro některé prvky. Tak např.
neutrální prvek součtu = anihilující prvek součinu = **nulový prvek**
inverzní prvek součtu = **opačný prvek**
neutrální prvek součinu = **jednotkový prvek**
inverzní prvek součinu = **reciproký prvek**.

***Příklad finitního tělesa*:**

Těleso $\mathbb{Z}_p \equiv \mathbb{Z} \bmod p$ obsahuje pouze prvky $\{0, \dots, p-1\}$, kde *p* je libovolné konečné (finitní) prvočíslo.

***Důkaz*:**

Každé $z \in \mathbb{Z}$, se zobrazí v tělese $\mathbb{Z}_p$ na prvek

$$\min\{|z - np|\} \in \mathbb{N}\,;\, n \in \mathbb{N}\,, \tag{11}$$

což je vždy menší, než *p*.

***Příklad*:**

$$\begin{aligned} [7]_5 + [13]_5 &= [20]_5 = 0, \\ [7]_5 \cdot [13]_5 &= [91]_5 = 1. \end{aligned} \tag{12}$$

Můžeme ale také počítat

$$\begin{aligned} [7]_5 + [13]_5 &= [2+3]_5 = [5]_5 = 0, \\ [7]_5 \cdot [13]_5 &= [2 \cdot 3]_5 = [6]_5 = 1. \end{aligned} \tag{13}$$

***Pozorování*:**

Druhá rovnost v (12) a (13) ukazuje (viz definici tělesa), že čísla $[7]_5 = 2$ a $[13]_5 = 3$ jsou si navzájem reciprokými. V tělese $\mathbb{Z}_5$ tudíž platí 2 = 3^{-1}, resp. 3 = 2^{-1}, a dále 1 = 1^{-1}, 4 = 4^{-1}. Tento příklad naznačuje existenci inverzního prvku ke každému nenulovému prvku okruhu $\mathbb{Z}_p$ a tedy skutečnost, že se doopravdy jedná o těleso. Důkaz, že tomu tak vskutku je, nyní krátce nastíníme.

***Důkaz*:**

Máme ukázat, že pokud je *p* prvočíslem, $k, l \in \mathbb{Z}$, pak

$$(p-k)(p-l) \bmod p = 1, \tag{14}$$

neboli

$$\frac{(p-k)(p-l)-1}{p} \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

Po roznásobení závorek a částečném odstranění zlomku odtud dostáváme podmínku

$$p-k-l+\frac{kl-1}{p} \in \mathbb{Z}, \tag{16}$$

ze které plyne požadavek

$$kl-1 = np, \tag{17}$$

kde $n = \mathbb{Z}$. Protože nalevo určitě stojí libovolné celé číslo, můžeme psát napravo vskutku (až na znaménko) jeho prvočíselný rozklad. Protože čísla *k*, *l* v (15) můžeme volit libovolně velká, dokážeme vždy zařídit, aby se v prvočíselném rozkladu na pravé straně (17) vysklytlo alespoň jedno prvočíslo *p*.
Snadno se lze přesvědčit, že pokud *p* není prvočíslem, reciproký prvek obecně neexistuje – ne každé přirozené číslo lze rozložit na součin jiných přirozených čísel, z nichž ani jedno není prvočíslem. Pokud je přirozené číslo nalevo (17) např. samo prvočíslem, lze jej psát z definice pouze jako součin jednotky a sebe sama. Okruhy $\mathbb{Z}_n$; $n \in \mathbb{N}$ tedy obecně netvoří algebraická tělesa.

***Příklad infinitního tělesa*:**

Těleso $\mathbb{Q}$ je typickým příkladem infinitního (spočetného) tělesa

***Důkaz*:**

Každé racionální číslo *a* lze zapsat ve tvaru

$$a = \frac{p}{q}, \tag{18}$$

kde $p, q \in \mathbb{Z}$ jsou nesoudělná čísla, $q > 0$. Číslo

$$v = |p| + q \in \mathbb{N} \tag{19}$$

nazveme výškou racionálního čísla *a*. Počet všch racionálních čísel dané výšky *v* je zřejmě spočetný. Pomocí přirozených čísel očíslujeme postupně nejprve všechna racionální čísla o výšce *v* = 1, pak všechna racionální čísla o výšce *v* = 2, atd. Tím získáme spočetný systém spočetných množin $\{M_n; n \in \mathbb{N}\}$. Pokud se nám podaří dokázat, že jejich sjednocení

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \tag{20}$$

tvoří rovněž spočetnou množinu, jsme s důkazem hotovi. To je však snadné: prvky každé množiny M_n uspořádáme do prosté posloupnosti dle schématu:

$$\begin{array}{l} M_1 = \{x_{11}, x_{12}, x_{13} \ldots\} \\ M_2 = \{x_{21}, x_{22}, x_{23} \ldots\} \\ M_3 = \{x_{31}, x_{32}, x_{33} \ldots\} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array} \tag{21}$$

Postupujeme-li po vedlejších diagonálách schématu, snadno sestrojíme zobrazení

$$
\begin{aligned}
&x_{11} \to 1, \\
&x_{12} \to 2, \\
&x_{21} \to 3, \\
&x_{13} \to 4, \\
&x_{22} \to 5, \\
&x_{31} \to 6, \\
&\ \vdots \qquad \vdots
\end{aligned}
\tag{22}
$$

které je vskutku vzájemně jednoznačným zobrazením množiny S na $\mathbb{N}$.

***Příklad transfinitního tělesa*:**

Množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel je typickým příkladem transfinitního (nespočetného) tělesa.

***Důkaz*:**

Důkaz provedeme sporem: předpokládejme, že je množina $\mathbb{R}$ spočetná. Potom rovněž množina všech čísel z intervalu $\langle 0,1 \rangle \subset \mathbb{R}$ je spočetná. Seřaďme všechna čísla tohoto intervalu do prosté posloupnosti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ a napišme jednotlivá čísla v desetinném tvaru:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 = 0,\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots \\
&\alpha_2 = 0,\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots \\
&\alpha_3 = 0,\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots \\
&\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&\alpha_n = 0,\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots \\
&\ \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Vyrobme číslo $\beta = 0,b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots$ tak, že

$$\begin{aligned} b_1 &= \alpha_{11}, \\ b_2 &= \alpha_{22}, \\ \vdots &\quad \vdots \\ b_n &= \alpha_{nn}, \\ \vdots &\quad \vdots \end{aligned} \tag{24}$$

Číslo $\beta \in \langle 0,1 \rangle$ je zřejmě různé od všech čísel α_i, což je hledaný spor s předpokladem, že posloupnost (α_i) obsahuje všechny prvky intervalu $\langle 0,1 \rangle$.

***Příklad*:**

Abychom demonstrovali, jak hustě jsou ve skutečnosti reálná čísla na číselné ose uspořádána, sestrojme posloupnost dvou disjunktních intervalů

$$(-\infty, a\rangle; \langle b, \infty) \in \mathbb{R}; \quad a < b. \tag{25}$$

Čísla *a*, *b* můžeme volit libovolně blízká, přesto vždy dokážeme sestrojit číslo

$$c = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{R}, \tag{26}$$

tj. jejich aritmetický průměr, pro který zjevně platí $a < c < b$ a tedy neleží ani v jednom z uvedených intervalů. Abychom skutečně dokázali matematicky uchopit veškerá reálná čísla, musíme sestrojit disjunktní dvojice intervalů typu

$$
\begin{aligned}
&(-\infty,a);(a,\infty),\\
&(-\infty,a\rangle;(a,\infty),\\
&(-\infty,a);\langle a,\infty),
\end{aligned}
\tag{27}
$$

které nazýváme řezy. Každým z nich je matematicky konzistentním způsobem definováno reálné číslo $a \in \mathbb{R}$.
Součet a součin dvou řezů definujeme tím nejpřirozenějším způsobem, jako řez

$$
\begin{aligned}
&(-\infty,a);(a,\infty)\oplus(-\infty,b);(b,\infty)=(-\infty,a+b);(a+b,\infty),\\
&(-\infty,a);(a,\infty)\otimes(-\infty,b);(b,\infty)=(-\infty,ab);(ab,\infty).
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Inverzním prvkem *b* k libovolnému nenulovému řezu *a* je takový řez, kterým se součin řezů $a \otimes b$ zobrazí na jednotkový řez:

$$
\begin{aligned}
&\forall(-\infty,a);(a,\infty),a\neq 0\ \exists!(-\infty,b);(b,\infty),b\neq 0:\\
&:(-\infty,ab);(ab,\infty)=(-\infty,1);(1,\infty).
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Vzhledem ke komutativitě *ab* je toto zobrazení vzájemně jednoznačné a vyjadřujeme jej zápisem

$$
\begin{aligned}
&a=b^{-1},\\
&b=a^{-1}.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Ověření, že řezy skutečně splňují i zbylé axiomy algebraického tělesa, ponecháváme čtenáři jako jednoduché domácí cvičení.

***Poznámka*:**

Dalšími příklady transfinitních těles jsou množina $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel, množina $\mathbb{H}$ všech kvaternionů, nebo množina O všech oktonionů. Mohutnost infinitních množin značíme ∞, mohutnost transfinitních množin značíme hebrejským písmenem $\aleph$ (čti alef).

Moduly a vektorové prostory

1) Definice modulu

Nechť *O* je okruh. Množinu *M* nazveme modulem nad okruhem *O*, jsou-li definovány na *M* operace sčítání a násobení konstantou z *O* splňující následující axiomy:

1) $(M,+)$ je abelovská grupa
2) $\forall \lambda, \mu \in O, \forall \mathbf{m} \in M : \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{m}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \mathbf{m}$
3) $0 \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0}$
4) $-1 \cdot \mathbf{m} = -\mathbf{m}$
5) $\forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \in M : \lambda \cdot (\mathbf{m} + \mathbf{n}) = \lambda \cdot \mathbf{m} + \lambda \cdot \mathbf{n}$
6) $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{m} = \lambda \cdot \mathbf{m} + \mu \cdot \mathbf{m}$
7) $1 \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m} \cdot 1 = \mathbf{m}$

2) Definice vektorového prostoru

Nechť *T* je těleso. Množinu *V* nazveme vektorovým prostorem nad tělesem *T*, jsou-li definovány na *V* operace sčítání a násobení konstantou z *T* splňující následující axiomy:

1) $(V,+)$ je abelovská grupa
2) $\forall \lambda, \mu \in T, \forall \mathbf{v} \in V : \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{v}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \mathbf{v}$
3) $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$
4) $-1 \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}$
5) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : \lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{v}$
6) $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} + \mu \cdot \mathbf{v}$
7) $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot 1 = \mathbf{v}$

Prvky vektorového prostoru nazýváme vektory a označujeme je vždy malými tučnými písmeny. Specielně nulový, resp. jednotkový vektor označujeme tučnou nulou, resp. jedničkou.

Poznámka

Algebra prostorů konstruovaných nad finitními tělesy (tzv. **faktorových prostorů**) je formálně o něco složitější, než algebra prostorů konstruovaných nad infinitními a transfinitními tělesy (tj. vektorových prostorů). V této učebnici se jí hlouběji zabývat nebudeme, vyjma několika příkladů, výslovně deklarovaných v textu.

Základní vlastnosti vektorů

1) $\mathbf{x}+\mathbf{0}=1\cdot\mathbf{x}+0\cdot\mathbf{x}=(1+0)\mathbf{x}=\mathbf{x}$ (31)

2) $\forall\alpha\in\mathbb{R}:\alpha\cdot\mathbf{0}=\alpha(0\cdot\mathbf{x})=(\alpha\cdot 0)\mathbf{x}=0\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$ (32)

3) $\forall\alpha\neq 0\wedge\alpha\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}:\mathbf{x}=\left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)\mathbf{x}=\frac{1}{\alpha}(\alpha\mathbf{x})=\frac{1}{\alpha}\mathbf{0}=\mathbf{0}$ (33)

4) $\forall\mathbf{x}\in V\exists!\mathbf{y}\in V:\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{y}=(-1)\cdot\mathbf{x}$ (34)

Důkaz

Předpokládejme nejprve existenci dvou takovýchto vektorů, označme je např. $\mathbf{y},\mathbf{z}$. Potom

$$\mathbf{y}=\mathbf{y}+(\mathbf{x}+\mathbf{z})=(\mathbf{y}+\mathbf{x})+\mathbf{z}=\mathbf{0}+\mathbf{z}=\mathbf{z}. \qquad (35)$$

Dále

$$\mathbf{x}+(-1)\cdot\mathbf{x}=1\cdot\mathbf{x}+(-1)\cdot\mathbf{x}=(1+(-1))\cdot\mathbf{x}=0\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}. \qquad (36)$$

Defice lineární závislosti vektorů

Skupina vektorů $S=\langle\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n\rangle$ z vektorového prostoru V je lineárně závislá právě tehdy, jestliže alespoň jeden z vektorů této skupiny je lineární kombinací ostatních, tj. platí-li

$$\exists\mathbf{u}_i\in S:\mathbf{u}_i=\beta_1\mathbf{u}_1+\cdots+\beta_{i-1}\mathbf{u}_{i-1}+\beta_{i+1}\mathbf{u}_{i+1}+\cdots+\beta_n\mathbf{u}_n, \qquad (37)$$

přičemž $\beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R}$.
Rovnice (37) je vyjádřením tzv. **lineární kombinace vektorů**.
Říkáme, že se nám podařilo vektor $\mathbf{u}_i$ lineárně nakombinovat z ostatních vektorů skupiny *S*.

Kritérium lineární závislosti vektorů

Skupina vektorů $S = \left\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \right\rangle$ z vektorového prostoru *V* je lineárně závislá právě tehdy, jestliže vektorová rovnice

$$\beta_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0} \tag{38}$$

s neznámými $\beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R}$ má netriviální řešení (tj. neplatí, že $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$).

Důkaz

Důkaz rozdělíme na dvě části a každou část dále na dva kroky:

1) $\Rightarrow$ Nechť skupina vektorů *S* je lineárně závislá. Potom alespoň jeden z vektorů této skupiny je lineární kombinací ostatních. Nechť je tímto vektorem např. $\mathbf{u}_n$. Lze tedy psát

$$\mathbf{u}_n = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1}, \tag{39}$$

kde $\beta_1, \cdots, \beta_{n-1} \in \mathbb{R}$. Odtud vyplývá, že

$$\beta_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + (-1)\mathbf{u}_n = \mathbf{0}. \tag{40}$$

Vektorová rovnice (38) má tedy vskutku netriviální řešení

$$\beta_1 = 0, \cdots, \beta_{n-1} = 0, \beta_n = -1. \tag{41}$$

1) $\Leftarrow$ Nechť má vektorová rovnice (38) netriviální řešení, potom $\exists \beta_i \neq 0$. Nechť např. $\beta_n \neq 0$. Potom z vektorové rovnice (38) plyne

$$\mathbf{u}_n = -\frac{\beta_1}{\beta_n}\mathbf{u}_1 - \cdots - \frac{\beta_{n-1}}{\beta_n}\mathbf{u}_{n-1}, \tag{42}$$

což znamená, že jsme vektor $\mathbf{u}_n$ lineárně nakombinovali z ostatních vektorů skupiny *S*, která je tudíž lineárně závislou.

2) $\Rightarrow$ Nechť $S = \langle \mathbf{u}_1 \rangle$ je lineárně závislá. Potom musí být $1 \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ a vektorová rovnice má netriviální řešení $\beta_1 = 1$.

2) $\Leftarrow$ Nechť má vektorová rovnice netriviální řešení $\beta_1 \neq 0$. Potom platí $\beta_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ a tedy

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\beta_1} \cdot \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}. \tag{43}$$

Skupina *S* je proto lineárně závislá.

Důsledek 1

Obsahuje-li systém $S = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$ nulový vektor, je lineárně závislý.

Důkaz

$$\forall \beta \neq 0, \beta \in \mathbb{R} : \beta \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}. \tag{44}$$

Důsledek 2

Obsahuje-li systém $S = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$ dva stejné vektory, je lineárně závislý.

Důkaz

$$\forall \beta \neq 0, \beta \in \mathbb{R} : \beta \cdot \mathbf{u} + (-\beta) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}. \tag{45}$$

První věta lineární kombinace

Podsystém lineárně nezávislého systému je lineárně nezávislým.

Důkaz

Mějme dán lineárně nezávislý systém vektorů $S = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$. Potom dle předešlé věty musí platit implikace

$$\beta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0 . \qquad (46)$$

Převedeme-li nyní libovolný člen (nebo skupinu členů) z levé strany napravo, dostaneme

$$\beta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_{i-1} \mathbf{v}_{i-1} + \beta_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} + \cdots + \beta_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} - \beta_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} . \qquad (47)$$

To ale vskutku znamená, že podsystém $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ původního lineárně nezávislého systému $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ je opět lineárně nezávislým, neboť znovu platí $\beta_1 = \cdots = \beta_{i-1} = \beta_{i+1} = \cdots = \beta_n = 0$.

Druhá věta lineární kombinace

Systém $S = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ prvků prostoru *V* je lineárně nezávislým právě když je každý vektor z *V* možno napsat nanejvýš jedním způsobem jako lineární kombinaci prvků systému *S*.

Důkaz

Důkaz provedeme sporem. Nechť je systém nezávislým a nechť

$$\forall \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}; \mathbf{v} \in V : \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{v}_i . \qquad (48)$$

Potom

$$\mathbf{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{v}_n \qquad (49)$$

a tedy musí být

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n : \alpha_i - \beta_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i . \qquad (50)$$

Nechť je naopak systém *S* závislým a nechť o tom svědčí netriviální lineární kombinace

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0} . \qquad (51)$$

Prvek **0** je však možno napsat ještě i jiným způsobem:

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{v}_n . \qquad (52)$$

Existují tedy nejméně dva způsoby, kterak vyjádřit každý vektor lineárně závislého systému.

Definice vektorové báze

Systém vektorů $S = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ z předchozí věty nazveme vektorovou bází *B* prostoru *V*, právě tehdy, jestliže každý vektor $\mathbf{v} \in V$ lze zapsat právě jedním způsobem jako lineární kombinaci tohoto systému.

Definice dimenze vektorového prostoru vzhledem k bázi

Počet prvků báze *B* vektorového prostoru *V* nazýváme dimenzí prostoru *V* vzhledem k bázi *B*, což značíme $\dim_B V$.

První věta vektorové báze

Nechť $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \rangle$ je lineárně nezávislý systém v konečnědimenzionálním vektorovém prostoru *V*. Není-li tento systém bází, potom jej lze doplnit o jisté vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ tak, že nová skupina $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$ již je bází prostoru *V*.

Důkaz

Nechť $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \rangle$ je nezávislý systém v prostoru *V*. Můžeme tedy psát

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_m \mathbf{u}_m = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0 \qquad (53)$$

Nechť dále $B = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ je báze prostoru *V*. Sestrojme systém vektorů

$$\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle. \qquad (54)$$

Tento systém je zřejmě lineárně závislý, neboť každý z vektorů $\mathbf{u}_i$ je lineární kombinací vektorů báze *B*. Existují tedy čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$, jež nejsou všechna rovna nule, taková, že

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_m \mathbf{u}_m + \beta_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \beta_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}. \qquad (55)$$

Protože všechna $\alpha_i = 0$, musí být alespoň jedno z čísel $\beta_i \neq 0$. Příslušný vektor $\mathbf{e}_i$ můžeme tedy psát jako lineární kombinaci skupiny vektorů

$$\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_n \rangle. \qquad (56)$$

Odtud a z faktu, že každý vektor z *V* lze psát jako lineární kombinaci systému (54) (neboť *B* je báze) plyne, že každý vektor z *V* lze psát jako lineární kombinaci systému (56). Je-li systém (56) lineárně nezávislý, je to báze a našeho cíle je dosaženo. Pokud tomu tak není, lze ze stejného důvodu vyškrtnout z (56) další vektor $\mathbf{e}_j$ který je lineární kombinací ostatních vektorů systému.

Takto lze postupovat do té doby, až po konečném počtu kroků (jelikož V je konečnědimenzionální prostor), získáme lineárně nezávislý systém vektorů, čili hledanou bázi ve tvaru $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$, kde $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ je jistých k vektorů z původní báze B.

Druhá věta vektorové báze

Každý systém $n + 1$ vektorů z n-dimenzionálního vektorového prostoru V_n je lineárně závislý.

Důkaz

Předpokládejme, že systém $n + 1$ vektorů S ve V_n je lineárně nezávislý. Podle první věty báze lze tento systém doplnit na bázi B vektorového prostoru V_n . Počet vektorů této báze je tedy větší, nebo roven číslu $n + 1$, tj.

$$\dim_B V_n \geq n + 1, \tag{57}$$

což je spor s předpokladem, že $\dim_B V_n = n$.

Třetí věta vektorové báze

Všechny báze konečnědimenzionálního netriviálního vektorového prostoru V mají stejný počet vektorů.

Důkaz

Nechť $B = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \rangle$, $B' = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ jsou dvě různé báze prostoru V. Předpokládejme nyní, že $m \neq n$. Nechť např. platí $n > m$. Potom systém vektorů $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1} \rangle$ je dle druhé věty báze lineárně závislým systémem. To je ovšem spor s předpokladem, že jej lze doplnit na bázi prostoru V (viz první věta báze). Proto musí být $n \leq m$. Předpoklad $n < m$ ovšem povede ke sporu úplně stejným postupem, takže musí vskutku platit $m = n$ což jsme chtěli dokázat.

***Důsledek*:**

Dimenze vektorového prostoru V je číslo, které je nezávislé na volbě báze, tj. dimenze prostoru V je volbou tohoto prostoru určena jednoznačně. Proto ji nadále budeme označovat již jen symbolem $\dim V$.

Definice vektorového podprostoru

Neprázdná podmnožina W vektorového prostoru V je vektorovým podprostorem prostoru V (označujeme $W \subset V$) právě tehdy, jestliže platí tyto dvě implikace:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W \\ &\alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in W \Rightarrow \alpha \mathbf{u} \in W. \end{aligned} \qquad (58)$$

Definice lineárního obalu systému vektorů

Množinu všech lineárních kombinací systému vektorů $\langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \rangle$ z vektorového prostoru V nazýváme lineárním obalem tohoto systému a označujeme $L\langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \rangle$.

Příklad vektorového podprostoru

Podmnožina $W : \{(x, y, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ je jeho vektorovým podprostorem.

Důkaz

Nechť

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (x_1, y_1, 0, 0) \in W, \\ \mathbf{v} &= (x_2, y_2, 0, 0) \in W, \end{aligned} \qquad (59)$$

potom rovněž

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\left(x_1+x_2, y_1+y_2, 0,0\right)\in W,$$
$$\forall \alpha\in\mathbb{R}: \alpha\mathbf{u}=\left(\alpha x_1,\alpha y_1,0,0\right),\ \alpha\mathbf{v}=\left(\alpha x_2,\alpha y_2,0,0\right). \qquad (60)$$

Příklad lineárního obalu systému vektorů

$L\left\langle(2,1,0,3),(3,2,1,5)\right\rangle\in\mathbb{R}^4$ je množina všech vektorů, jež lze zapsat ve tvaru $\alpha(2,1,0,3)+\beta(3,2,1,5)$, kde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

***Pozorování*:**

Samozřejmě, že uvažovaný lineární obal nepředstavuje celý prostor $\mathbb{R}^4$. Kdybychom však sestrojili lineární obal báze prostoru $\mathbb{R}^4$, obdrželi bychom tento vektorový prostor celý.

***Příklad*:**

$$\forall\alpha,\beta,\gamma,\delta:\alpha(1,0,0,0)+\beta(0,1,0,0)+\gamma(0,0,1,0)+\delta(0,0,0,1)=$$
$$=(\alpha,0,0,0)+(0,\beta,0,0)+(0,0,\gamma,0)+(0,0,0,\delta)=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4 \qquad (61)$$

Definice generujícího systému vektorového prostoru

Systém vektorů $B=\left\langle\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\right\rangle$ pro který platí

$$L(B)=L\left\langle\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\right\rangle=V \qquad (62)$$

nazýváme systémem generátorů či generujícím systémem prostoru *V*.

První věta lineárního obalu

Lineární obal $L\left\langle\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_k\right\rangle$ je vektorovým podprostorem prostoru V právě tehdy, když $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_k\in V$.

Důkaz

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}; \mathbf{u}, \mathbf{v} \in L\left\langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k \right\rangle \equiv W$. Potom

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_1\mathbf{w}_1 + \cdots + u_k\mathbf{w}_k, \\ \mathbf{v} &= v_1\mathbf{w}_1 + \cdots + v_k\mathbf{w}_k. \end{aligned} \tag{63}$$

Podle definice vektorového podprostoru máme dokázat, že

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W, \\ &\alpha\mathbf{u} \in W. \end{aligned} \tag{64}$$

Skutečně platí

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1 + v_1)\mathbf{w}_1 + \cdots + (u_k + v_k)\mathbf{w}_k \in W, \\ \alpha\mathbf{u} &= (\alpha u_1)\mathbf{w}_1 + \cdots + (\alpha u_k)\mathbf{w}_k \in W. \end{aligned} \tag{65}$$

Druhá věta lineárního obalu

Předpokládejme, že skupina vektorů $S = \left\langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \right\rangle$ je systémem generátorů vektorového prostoru *W*.
Provedeme-li se systémem *S* některou z následujících operací, získáme nový systém generátorů téhož vektorového prostoru *W*:

1) Zaměníme pořadí vektorů v systému *S*.
2) Vynásobíme některý z vektorů skupiny *S* nenulovým číslem
3) Přičteme k některému z vektorů skupiny *S* lineární kombinaci zbylých vektorů systému.
4) Připojíme k vektorům systému *S* libovolný další vektor, který je lineární kombinací vektorů tohoto systému.
5) Jestliže je některý z vektorů systému *S* lineární kombinací zbývajících vektorů tohoto systému, vynecháme jej.

Důkaz

1) Tento bod je triviální
2) Nechť $\alpha \neq 0$. Uvažujme vektorové prostory

$$W = L\langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \rangle, \\ W' = L\langle \alpha\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \rangle. \tag{66}$$

Máme dokázat, že $W = W'$. Předpokládejme tedy, že $\mathbf{x} \in W$, tj.

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{w}_1 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n = \frac{x_1}{\alpha}(\alpha\mathbf{w}_1) + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_2\mathbf{w}_2. \tag{67}$$

Odtud je ihned vidět, že vskutku $\mathbf{x} \in W'$ a proto $W = W'$.
Snadno zjistíme, že platí i obrácená implikace, tj.

$$\mathbf{x} \in W' \Rightarrow \mathbf{x} \in W. \tag{68}$$

3) Mějme čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \neq 0$; $n \in \mathbb{N}^+$. Chceme dokázat, že

$$W = L\langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \rangle = L\langle (\mathbf{w}_1 + \alpha_1\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_{n-1}\mathbf{w}_n), \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n \rangle = W' \tag{69}$$

Zvolme vektor $\mathbf{x} \in W$ tak, aby platila vektorová rovnice

$$x_2\mathbf{w}_2 + x_3\mathbf{w}_3 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n = \mathbf{0}. \tag{70}$$

Potom

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n = \\ &= x_1\mathbf{w}_1 + \frac{x_2}{\alpha_1}(\alpha_1\mathbf{w}_2) + \cdots + \frac{x_n}{\alpha_{n-1}}(\alpha_{n-1}\mathbf{w}_n) + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n.\end{aligned} \tag{71}$$

Odtud

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{w}_1 + 0 + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n = x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n \in W'$$

Proto $W = W'$. (72)

4) tento bod se dokáže analogicky jako bod 3.
5) Máme dokázat, že

$$W = L\left\langle \mathbf{w}_1, \left(\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_3 + \cdots + \alpha_{n-1} \mathbf{w}_n\right), \mathbf{w}_3, \ldots, \mathbf{w}_n \right\rangle = \\ = L\left\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3, \ldots, \mathbf{w}_n \right\rangle = W'. \quad (73)$$

Analogicky jako při důkazu ostatních bodů zvolíme vektor $\mathbf{x} \in W$ a dostáváme

$$x = x_1 \mathbf{w}_1 + \left(\frac{x_2}{\alpha_1}\left(\alpha_1 \mathbf{w}_1\right) + \frac{x_3}{\alpha_2}\left(\alpha_2 \mathbf{w}_3\right) + \cdots + \frac{x_n}{\alpha_{n-1}}\left(\alpha_{n-1} \mathbf{w}_n\right) \right) + \\ + x_3 \mathbf{w}_3 + \cdots + x_n \mathbf{w}_n. \quad (74)$$

Odtud

$$x = x_1 \mathbf{w}_1 + 0 + x_3 \mathbf{w}_3 + \cdots + x_n \mathbf{w}_n = x_1 \mathbf{w}_1 + x_3 \mathbf{w}_3 + \cdots + x_n \mathbf{w}_n \in W'. \quad (75)$$

Proto $W = W'$.

***Definice*:**

Výše popsaných 5 transformací zachovávajících lineární obal vektorového prostoru nazýváme **elementárními transformacemi**. Elementární transformace v systému vektorů využívá např. **Gaussova eliminační metoda** (GEM), se kterou se seznámíme později.

Johann Carl Friedrich Gauss

***Poznámka*:**

Základní poznatky o vektorových prostorech a jejich vlastnostech, které jsme získali v tomto odstavci, lze shrnout do tzv. **Steinitzovy věty**:

Steinitzova věta

Budiž $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$ systém generátorů vektorového prostoru V. Nechť $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ je nějaký lineárně nezávislý systém ve V. Potom

1) $k \le n$
2) Po vhodném přečíslování prvků $\mathbf{u}_j$ generuje skupina $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$ prostor V, neboli platí

$$L\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle = V \,. \tag{76}$$

Důkaz

Důkaz provedeme indukcí. Pokud k = 1, pak

$$\mathbf{v}_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i \,, \tag{77}$$

ježto $\mathbf{u}_i$ generují *V*. Při tom musí být některý z koeficientů $\alpha_j \neq 0$, neboť jinak by $\mathbf{v}_1$ byl nulový vektor a ten netvoří lineárně nezávislý systém. Položme tedy např. $\alpha_1 \neq 0$ a po vydělení obou stran rovnice (77) tímto koeficientem dostáváme

$$\frac{1}{\alpha_1}\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1}\mathbf{u}_i \,, \tag{78}$$

neboli

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\alpha_1} - \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1}\mathbf{u}_i \,. \tag{79}$$

Máme tedy

$$L\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle = L\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle = V \,, \tag{80}$$

neboť $L\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle \subseteq L\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$ právě když každý prvek $\mathbf{v}_i$ můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci prvků $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$.
Nechť tvrzení platí pro $k = m$ a nechť $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m+1} \rangle$ je stále ještě lineárně nezávislý systém. Dle indukčního předpokladu máme generující systém $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_{m+1}, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$. Můžeme tedy psát

$$\mathbf{v}_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i \,. \tag{81}$$

jelikož je $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m+1} \rangle$ lineárně nezávislý systém, musí být

$$\mathbf{v}_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{v}_i \neq \mathbf{0} \,, \tag{82}$$

čili rovněž

$$\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}. \qquad (83)$$

Odtud ihned plyne, že jednak pro nové $k = m + 1$ platí

$$k \leq n \qquad (84)$$

a jednak

$$\exists\ j \geq k : \alpha_j \neq 0. \qquad (85)$$

Položíme-li např. $\alpha_k \neq 0$, dostaneme po vydělení rovnice (81) tímto členem

$$u_k = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{\alpha_k} \mathbf{v}_i + \frac{v_k}{\alpha_k} - \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_k} \mathbf{u}_i\ , \qquad (86)$$

což je hledaná rovnost.

Ernst Steinitz (1871 – 1928)

Vektorové podprostory

Sjednocení podprostorů

Nechť *X*, *Y* jsou dva vektorové podprostory vektorového prostoru *V*. Potom množina

$$X \cup Y = \left\{ \mathbf{x} + \mathbf{y} \in V : \mathbf{x} \in V \wedge \mathbf{y} \in V \right\}, \tag{87}$$

kterou nazýváme sjednocením podprostorů *X*, *Y*, je vektorovým podprostorem prostoru *V*.

Důkaz

Nechť $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in X \cup Y$. Potom

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2, \end{aligned} \tag{88}$$

kde $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in Y$. Platí tedy

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in X, \alpha \mathbf{x}_1 \in X, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \in Y, \alpha \mathbf{y}_1 \in Y, \tag{89}$$

takže

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= \left(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \right) + \left(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \right) \in X \cup Y, \\ \alpha \mathbf{u} &= \alpha \left(\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 \right) = \alpha \mathbf{x}_1 + \alpha \mathbf{y}_1 \in X \cup Y. \end{aligned} \tag{90}$$

To ale dle definice podprostoru znamená, že vskutku $X \cup Y \subset V$.

Průnik podprostorů

Průnik libovolného systému vektorových podprostorů vektorového prostoru *V* je vektorovým podprostorem prostoru *V*.

Důkaz

Předpokládejme systém $\langle W_i \rangle$ vektorových podprostorů prostoru V, kde i probíhá přes indexovou množinu A. Protože nulový vektor leží v každém podprostoru W_i, je množina

$$W = \bigcap_{i \in A} W_i \tag{91}$$

neprázdná. Zřejmě platí implikace

$$\forall i \in A : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W \Rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W_i . \tag{92}$$

Protože ale

$$\forall i \in A : W_i \subset V , \tag{93}$$

je

$$\forall i \in A, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \in W_i , \alpha \mathbf{x} \in W_i . \tag{94}$$

Tedy rovněž

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W , \alpha \mathbf{x} \in W . \tag{95}$$

Dle definice vektorového podprostoru to ale znamená, že vskutku $W \subset V$.

První věta dimenze

Nechť W je vektorový podprostor n-rozměrného vektorového prostoru V. Potom

$$\dim W \leq \dim V . \tag{96}$$

Důkaz

Je-li *W* triviální vektorový prostor, potom $\dim W = 0$ a tvrzení platí. Nechť *W* je netriviální vektorový prostor. Zvolme nenulový vektor $\mathbf{u}_1 \in W$ a označme $W_1 = L\langle \mathbf{u}_1 \rangle$. Jestliže pak $W_1 = W$, jsme s důkazem hotovi. Pokud ale $W_1 \subset W$, zvolíme další vektor $\mathbf{u}_2 \in W \setminus W_1$. Označme $W_2 = L\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$. Je-li již $W_2 = W$, jsme s důkazem hotovi, v opačném případě postupujeme tímto způsobem tak dlouho, až po konečném počtu *k* kroků $(k \le n)$ sestrojíme prostor $W_k = W$. Tedy vskutku platí

$$\dim W = k \le n = \dim V . \tag{97}$$

Druhá věta dimenze

Nechť *X, Y* jsou konečněrozměrné vektorové podprostory vektorového prostoru *V*. Potom platí

$$\dim X + \dim Y = \dim\left(X \cup Y \right) + \dim\left(X \cap Y \right). \tag{98}$$

Důkaz

Podle vět o sjednocení a průniku podprostorů jsou $X \cup Y$ a $X \cap Y$ rovněž podprostory prostoru *V*. Dále samozřejmě platí relace:

$$\begin{aligned} &X \cap Y \subseteq X, \\ &X \cap Y \subseteq Y, \\ &X \cup Y \supseteq X, \\ &X \cup Y \supseteq Y, \\ &X \cap Y \subseteq X \cup Y. \end{aligned} \tag{99}$$

Označme

$$m \equiv \dim X,$$
$$n \equiv \dim Y, \tag{100}$$
$$k \equiv \dim(X \cap Y).$$

Dle první věty dimenze je $k \leq m, k \leq n$. Nechť $B = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ je báze prostoru $X \cap Y$. V případě, že $k = m = n$ jsme s důkazem hotovi.
V případě $k < m, k < n$ lze tento systém vektorů dle druhé věty báze doplnit na bázi prostoru *X*, resp. *Y*, resp. $X \cup Y$, tvaru

$$\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m \rangle, \tag{101}$$

resp.

$$\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{y}_{k+1}, \dots, \mathbf{y}_n \rangle, \tag{102}$$

resp.

$$\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_{k+1}, \dots, \mathbf{y}_n \rangle. \tag{103}$$

Proto

$$\dim(X \cup Y) = m + (n - k), \tag{104}$$

což jsme chtěli dokázat.

Matice

Definice matice

Libovolný uspořádaný systém sloupcových (resp. řádkových) vektorů $S = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle \in V$ tvoří schéma zvané **matice**, které rozepsáno do složek nabývá tvaru

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{pmatrix}, \tag{105}$$

kde první index každého prvku vždy označuje pořadí řádku, druhý index pořadí sloupce, ve kterém se daný prvek vyskytuje.
Říkáme, že matice (105) je typu $m\times n$, což často vyjadřujeme zápisem $\mathbf{S}(m\times n)$.

Definice hodnosti matice

Počet lineárně nezávislých vektorů v *S*, neboli číslo

$$h=\dim L\langle \mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m\rangle, \tag{106}$$

nazýváme **hodnostní matice S** a značíme $h(\mathbf{S})$.

Definice regulární matice

Matici $\mathbf{S}(n\times n)$ (tzv. čtvercovou matici) nazveme **regulární maticí**, právě když platí rovnost

$$h(\mathbf{S})=n, \tag{107}$$

neboli, když

$$\dim L\langle \mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n\rangle=n, \tag{108}$$

čili

$$L\langle \mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n\rangle=V. \tag{109}$$

Sloupce (resp. řádky) regulární matice tedy tvoří systém generátorů prostoru *V*.

Definice singulární matice

Každou matici, která není regulární, nazveme **singulární maticí**.

***Příklad 1*:**

Mějme 2 vektorové podprostory

$$U = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2),\quad V = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \tag{110}$$

vektorového prostoru W_4, kde

$$\mathbf{u}_1 = (1,2,1,0),\ \mathbf{u}_2 = (-1,1,1,1),\quad \mathbf{v}_1 = (1,-1,3,7),\ \mathbf{v}_2 = (0,1,-6,-13). \tag{111}$$

Vypočtěme prostor

$$Z = U \cup V\,. \tag{112}$$

***Řešení*:**

Prostřednictvím elementárních transformací (viz druhá věta lineárního obalu) postupně upravíme systém generátorů obou podprostorů, tvořících řádky čtvercové matice, na tzv. **horní lichoběžníkovou matici**. Uvedená metoda je známa, jako **Gaussova eliminační metoda** (GEM):

Čísla $a|b$ u příslušného řádku vždy značí, že tento řádek nejprve vynásobíme číslem *a* a výsledek poté přičteme k *b*-násobku řádku označeného •. Výsledným vektorem v následujícím kroku nahradíme původní počítaný řádek. Takto postupujeme do té doby, dokud původní matici neupravíme na horní lichoběžníkový (specielně horní trojúhelníkový) tvar.

$$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&-1&3&7\\-1&1&1&1\\0&1&-6&-13\end{pmatrix}\begin{array}{c}\bullet\\1|-1\\1|1\\ \end{array}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-3&2&7\\0&3&2&1\\0&1&-6&-13\end{pmatrix}\begin{array}{c}\\ \bullet\\1|1\\-3|1\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-3&2&7\\0&0&4&8\\0&0&20&40\end{pmatrix}\begin{array}{c}\\ \\ \bullet\\-1|5\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-3&2&7\\0&0&4&8\\0&0&0&0\end{pmatrix}. \qquad (113)$$

Takže

$$Z = L\big((1,2,1,0),(0,-3,2,7),(0,0,4,8)\big)\subset W_4. \qquad (114)$$

***Pozorování*:**

Protože $\dim U + \dim V = 4$ a $\dim Z = \dim(U \cup V) = 3$, musí být $\dim(U \cap V) = 1$, ježto platí (98).

***Příklad 2*:**

Budiž dán systém vektorů prostoru V_4

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= (3,0,4,5),\\ \mathbf{u}_1 &= (1,2,2,6),\\ \mathbf{u}_1 &= (5,0,0,4),\\ \mathbf{u}_1 &= (4,4,1,5).\end{aligned} \qquad (115)$$

Ověřte, zda je systém lineárně závislý, či nezávislý

a) leží-li prostor V_4 nad tělesem $\mathbb{R}$.
b) leží-li prostor V_4 nad tělesem $\mathbb{Z}_7$

***Řešení*:**

a)

$$
\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \bullet \\ -3|1 \\ -3|5 \\ -3|4 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -2 & -13 \\ 0 & 0 & 4 & 13 \\ 0 & -3 & 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \bullet \\ \\ -2|1 \end{array} \sim \\
\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -2 & -13 \\ 0 & 0 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & -12 & -23 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \bullet \\ 1|3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -2 & -13 \\ 0 & 0 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.\end{array} \qquad (116)
$$

Vidíme, že nad tělesem $\mathbb{R}$ je systém (115) lineárně nezávislým a tvoří tedy bázi prostoru V_4.

b)

$$
\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \bullet \\ 1|2 \\ 1|3 \\ 1|1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \bullet \\ \\ 1|5 \end{array} \sim \\
\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \bullet \\ 1|3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{array} \qquad (117)
$$

Systém (115) je nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ lineárně závislý.

Definice jednotkové matice

Jednotkový prvek grupy všech regulárních matic tvoří matici

$$\mathbf{E} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \tag{118}$$

kterou nazýváme **jednotkovou maticí**.

Definice kanonické báze

Vektorovou bázi tvořenou sloupci (resp. řádky) jednotkové matice nazýváme **kanonickou bází**.

Definice transponované matice

Matici **B** nazveme transponovanou maticí k matici **A**, což značíme

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \tag{119}$$

jestliže platí

$$\forall b \in \mathbf{B}, a \in \mathbf{A} : a_{ij} = b_{ji} . \tag{120}$$

Řečeno slovy, transponovaná matice vznikne z původní matice **A** vzájemnou záměnou prvků v *i*-tém řádku za prvky v *i*-tém sloupci (tj. vzájemným prohozením řádků a sloupců), čili jako zrcadlový obraz matice **A** podle její hlavní diagonály.

Součin dvou matic

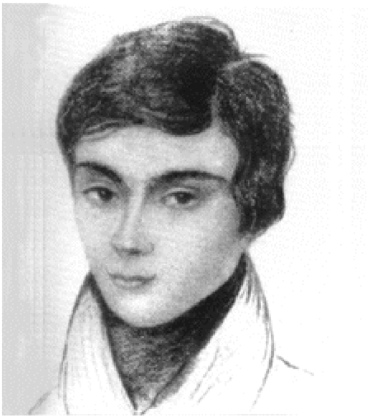
Mějme dvě matice: $\mathbf{A}(m\times n)$, $\mathbf{B}(n\times l)$. Potom operaci

$$\mathbf{AB}(m\times l)\equiv(ab)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \qquad (121)$$

nazveme součinem matic **A**, **B** v tomto pořadí.

***Pozorování*:**

Násobení matic zřejmě není obecně komutativní operace, takže matice vzhledem k této operaci tvoří obecně neabelovskou grupu.



Niels henrik Abel (1802 – 1829)

První věta matice

Nechť **A**, **B**, **C** jsou nějaké matice, **E** je jednotková matice. Potom každá z rovností

a) $\mathbf{AE}=\mathbf{A}=\mathbf{EA}$ (122)

b) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$ (123)

c) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ (124)

d) $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (125)

platí, pokud operace na její levé straně mají smysl.

Důkaz

Důkaz tvrzení a), b), c) ponecháváme čtenáři jako jednoduché domácí cvičení, tvrzení d) nyní dokážeme:
Nechť jednotlivé matice jsou typu $\mathbf{A}(m\times n), \mathbf{B}(n\times p), \mathbf{C}(p\times q)$.
Všechny součiny v d) potom mají smysl a výsledné matice na obou stranách rovnosti jsou téhož typu $m\times q$. Označme

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}(m\times n)\equiv a_{ij}, \mathbf{B}(n\times p)\equiv b_{ij}, \mathbf{C}(p\times q)\equiv c_{ij}, \\
&\mathbf{AB}(m\times p)\equiv u_{ij}, \mathbf{BC}(n\times q)\equiv v_{ij}, \\
&(\mathbf{AB})\mathbf{C}(m\times q)\equiv x_{ij}, \mathbf{A}(\mathbf{BC})(m\times q)\equiv y_{ij}.
\end{aligned} \tag{126}$$

Potom platí

$$\begin{aligned}
x_{ij} &= \sum_{s=1}^{p} u_{is}c_{sj} = \sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{ts}c_{sj}, \\
y_{ij} &= \sum_{t=1}^{n} a_{it}v_{tj} = \sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{p} a_{it}b_{ts}c_{sj}.
\end{aligned} \tag{127}$$

Tedy vskutku $x_{ij} = y_{ij}$.

Druhá věta matice

$$(\mathbf{AB})^{\mathsf{T}} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \tag{128}$$

Důkaz

$$(\mathbf{AB})^{\mathsf{T}} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \tag{129}$$

Nehomogenní soustavy

***Pozorování*:**

Specielně, součin nějaké matice **A** a vektoru **x** generuje obecně jiný vektor **b**, což zapisujeme jako

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{130}$$

o kteréžto operaci hovoříme jako o lineární transformaci (zobrazení) vektoru **x** přes maticový operátor **A**.
V praxi se často setkáváme s problémem, kdy vektor **x** je pro nás neznámá. V takovém případě vyjadřuje vztah (130) maticovou rovnici, čili soustavu lineárních rovnic o více neznámých a o matici **A** hovoříme jako o **matici soustavy** (130).

První věta nehomogenní soustavy

Je-li n počet neznámých soustavy (130), potom platí:

a) jestliže $h(\mathbf{A}) = n$, má soustava (130) právě jedno řešení
b) jestliže $h(\mathbf{A}) < n$, má soustava (130) nekonečně mnoho řešení

Důkaz

Bod a) je zcela zřejmý.
Bod b) všechna řešení obdržíme tak, že jistých $n - h$ neznámých volíme všemi možnými (tj. nekonečně mnoha) různými způsoby a zbývajících h neznámých jednoznačně dopočítáme.

Definice rozšířené matice soustavy

Rozšířenou maticí soustavy (130) rozumíme matici

$$\mathbf{R} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right), \qquad (\ 131\ )$$

tj. matici **A** doplněnou vpravo o sloupcový vektor **b** (tzv. vektor pravých stran soustavy (130)).

Druhá věta nehomogenní soustavy

Každé řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic (130) je zároveň řešením každé rovnice, jejíž charakteristický vektor náleží do lineárního obalu všech řádků rozšířené matice soustavy

Důkaz

Důkaz plyne okamžitě z druhé věty lineárního obalu. Nahradíme-li kterýkoliv řádek matice soustavy charakteristickým vektorem z jejího lineárního obalu, její řešení se nezmění.

Třetí věta nehomogenní soustavy

Mají-li dvě soustavy rovnic tytéž neznámé psané v témže pořadí a jsou-li lineární obaly řádků rozšířených matic obou soustav shodné, potom obě soustavy jsou ekvivalentní.

Důkaz

Z předpokladů dokazované věty plyne, že každá rovnice první soustavy je lineární kombinací rovnic druhé soustavy a naopak. Podle druhé věty nehomogenní soustavy je každé řešení první soustavy zároveň řešením druhé soustavy a obráceně. To ale znamená, že obě soustavy jsou skutečně ekvivalentní.

Frobeniova věta

Nechť matice **R** je rozšířenou maticí soustavy (130). Tato soustava má řešení právě když $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{R})$.

Důkaz

Nechť soustava (130) má vektor řešení $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Platí tedy

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k . \qquad (132)$$

Odtud plyne, že poslední sloupec matice **R**, tj. vektor **b**, je lineární kombinací všech sloupců matice **A**. Proto nutně

$$h(R) = h(A). \qquad (133)$$

Nechť obráceně $h(R) = h(A) \equiv h$. Potom matice **R** má týž počet lineárně nezávislých sloupců jako matice **A**. Proto poslední sloupec matice **R**, tj. vektor **b**, musí být lineární kombinací sloupců matice **A**. Existuje tedy takový vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, že platí (132), neboli

$$s_1x_1 + s_2x_2 + \cdots + s_nx_n = \mathbf{b}, \qquad (134)$$

kde s_k je k-tý sloupec matice **A**, čili

$$s_k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk}), \quad k = 1, 2, \ldots, m. \qquad (135)$$

Ferdinand Georg Frobenius (1849 – 1917)

***Příklad 1*:**

Nad tělesem $\mathbb{R}$ najděme parametr λ takový, aby vektor **b** byl lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, kde

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (3,2,6), \\ \mathbf{a}_2 &= (6,8,7), \\ \mathbf{b} &= (9,12,\lambda). \end{aligned} \tag{136}$$

***Řešení*:**

$$\alpha(3,2,6) + \beta(6,8,7) = (9,12,\lambda) \tag{137}$$

To je však soustava rovnic

$$\begin{aligned} 3\alpha + 6\beta &= 9 \\ 2\alpha + 8\beta &= 12 \\ 6\alpha + 7\beta &= \lambda \end{aligned} \tag{138}$$

Gaussovou eliminační metodou dostáváme

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 8 & 12 \\ 6 & 7 & \lambda \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 8 & 12 \\ 3 & 6 & 9 \\ 6 & 7 & \lambda \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 8 & 12 \\ 0 & -6 & -9 \\ 0 & -17 & \lambda - 36 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 8 & 12 \\ 0 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & \lambda - 10{,}5 \end{array}\right), \tag{139}$$

odkud

$$\underline{\underline{\lambda = 10{,}5}}. \tag{140}$$

***Příklad 2*:**

Nad tělesem $\mathbb{R}$ najděme parametr λ takový, aby vektor **b** byl lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, kde

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (2,3,5), \\ \mathbf{a}_2 &= (3,7,8), \\ \mathbf{a}_3 &= (1,-6,1), \\ \mathbf{b} &= (7,-2,\lambda). \end{aligned} \tag{141}$$

***Řešení*:**

$$\alpha(2,3,5) + \beta(3,7,8) + \gamma(1,-6,1) = (7,-2,\lambda) \tag{142}$$

To je však soustava rovnic

$$\begin{aligned} 2\alpha + 3\beta + \gamma &= 7 \\ 3\alpha + 7\beta - 6\gamma &= -2 \\ 5\alpha + 8\beta + \gamma &= \lambda \end{aligned} \tag{143}$$

Gaussovou eliminační metodou dostáváme

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 2,5 & -7,5 & -12,5 \\ 0 & 0,5 & -1,5 & (\lambda - 17,5) \end{array}\right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 2,5 & -7,5 & -12,5 \\ 0 & 0 & 0 & (2,5 - 17,5 + \lambda) \end{array}\right). \end{aligned} \tag{144}$$

Odtud zpětným chodem GEM

$$2,5 - 17,5 + \lambda = 0, \tag{145}$$

čili

$$\underline{\underline{\lambda = 15}}. \tag{146}$$

***Příklad 3*:**

Nad tělesem $\mathbb{R}$ najděme parametr λ takový, aby vektor **b** byl lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, kde

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (4,4,3), \\ \mathbf{a}_2 &= (7,2,1), \\ \mathbf{a}_3 &= (4,1,6), \\ \mathbf{b} &= (5,9,\lambda). \end{aligned} \tag{147}$$

***Řešení*:**

$$\alpha(4,4,3) + \beta(7,2,1) + \gamma(4,1,6) = (6,9,\lambda) \tag{148}$$

To je však soustava rovnic

$$\begin{aligned} 4\alpha + 7\beta + 4\gamma &= 5 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma &= 9 \\ 3\alpha + \beta + 6\gamma &= \lambda \end{aligned} \tag{149}$$

Gaussovou eliminační metodou dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & 6 & \lambda \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -3 & 4 \\ 0 & -4{,}25 & 3 & (\lambda - 3{,}75) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 5{,}55 & (\lambda - 7{,}15) \end{array}\right) \tag{150}$$

Odtud zpětným chodem GEM

$$\lambda - 7{,}15 = 5{,}55\gamma,$$
$$\lambda = 5{,}55\gamma + 7{,}15, \qquad (151)$$

čili

$$\underline{\underline{\lambda \in \mathbb{R}}}. \qquad (152)$$

***Příklad 4*:**

Nad tělesem $\mathbb{R}$ najděme parametr λ takový, aby vektor **b** byl lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, kde

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= (3,2,6),\\
\mathbf{a}_2 &= (7,3,9),\\
\mathbf{a}_3 &= (5,1,3),\\
\mathbf{b} &= (\lambda,2,5).
\end{aligned} \qquad (153)$$

***Řešení*:**

$$\alpha(2,3,5) + \beta(3,7,8) + \gamma(1,-6,1) = (7,-2,\lambda) \qquad (154)$$

To je však soustava rovnic

$$\begin{aligned}
3\alpha + 7\beta + 5\gamma &= \lambda\\
2\alpha + 3\beta + \gamma &= 2\\
6\alpha + 9\beta + 3\gamma &= 5
\end{aligned} \qquad (155)$$

Gaussovou eliminační metodou dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2\\ 6 & 9 & 3 & 5\\ 3 & 7 & 5 & \lambda \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 2{,}5 & 3{,}5 & (\lambda-3) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 2{,}5 & 3{,}5 & (\lambda-3)\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$
$$(156)$$

Odtud

$$\underline{\underline{\lambda \in \emptyset}}. \tag{157}$$

***Příklad 5*:**

Nad tělesem $\mathbb{R}$ najděme parametr λ takový, aby vektor **b** byl lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, kde

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (3,2,5), \\ \mathbf{a}_2 &= (2,4,7), \\ \mathbf{a}_3 &= (5,6,\lambda), \\ \mathbf{b} &= (1,3,5). \end{aligned} \tag{158}$$

***Řešení*:**

$$\alpha(3,2,5) + \beta(2,4,7) + \gamma(5,6,\lambda) = (1,3,5) \tag{159}$$

To je však soustava rovnic

$$\begin{aligned} 3\alpha + 2\beta + 5\gamma &= 1 \\ 2\alpha + 4\beta + 6\gamma &= 3 \\ 6\alpha + 7\beta + \lambda\gamma &= 5 \end{aligned} \tag{160}$$

Gaussovou eliminační metodou dostáváme

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & \lambda & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & \lambda & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & -4 & -4 & -3{,}5 \\ 0 & -3 & \lambda-15 & -2{,}5 \end{array}\right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & -4 & -4 & -3{,}5 \\ 0 & 0 & \lambda-12 & 0{,}125 \end{array}\right). \end{aligned} \tag{161}$$

Odtud zpětným chodem GEM

$$\begin{aligned} 2\alpha+4\beta+6\gamma&=-3 \\ -4\beta-4\gamma&=3{,}5 \\ (\lambda-12)\gamma&=-0{,}125 \end{aligned} \tag{162}$$

Soustava má řešení pro

$$\underline{\underline{\lambda\in\mathbb{R}}}. \tag{163}$$

Zvolíme-li např. $\gamma=1$, dostáváme $\lambda=11{,}875$.

Inverzní matice

Definice inverzní matice

Matici $\mathbf{A}^{-1}$ nazveme **inverzní maticí** k matici **A**, jestliže platí

$$\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E} \tag{164}$$

Důsledek

Nechť maticová rovnice (130) má řešení **x**. Potom

$$\exists\mathbf{A}^{-1}:\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \tag{165}$$

Důkaz

Rovnici (130) vynásobíme střídavě zleva a zprava maticí $\mathbf{A}^{-1}$, čímž dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax}&=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, \\ \mathbf{AA}^{-1}\mathbf{x}&=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, \end{aligned} \tag{166}$$

čili vskutku

$$\mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \qquad (167)$$

Matice $\mathbf{A}^{-1}$ s vlastností (165) tedy vskutku vyhovuje definici inverzní matice (164)

Regularita inverzní matice

Jestliže $\mathbf{A}(n\times n)$ je regulární matice, potom $\mathbf{A}^{-1}(n\times n)$ je rovněž regulární.

Důkaz

Matici $\mathbf{A}^{-1}$ lze sestrojit z jednotkové matice $\mathbf{E}(n\times n)$ elementárními úpravami jejích řádků, resp. sloupců, které (jak víme z druhé věty lineárního obalu), zachovávají lineární obal těchto řádků, resp. sloupců. Proto

$$h\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = h(\mathbf{E}) = h(\mathbf{A}). \qquad (168)$$

Existenční kritérium inverzní matice

Nutnou a postačující podmínkou pro regularitu matice **A** je její invertibilita, tj. existence inverzního prvku $\mathbf{A}^{-1}$. Ke každé matici existuje nejvýše jeden inverzní prvek a to tehdy a jen tehdy, je-li matice regulární.

Důkaz

Začneme úlohou nalézt matici **B** tak, aby $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$, tj.

$$\sum_k a_{ik} b_{kj} = \delta_{ij}; \quad j = 1, \dots, n. \qquad (169)$$

j volíme vždy pevné, takže máme soustavu *m* rovnic pro *n* neznámých. Je-li **A** regulární, má tato soustava dle Frobeniovy věty řešení pro každou pravou stranu.
Naopak, má-li každá taková soustava řešení, jsou všechny sloupce tvořené vektory ortonormální báze prvky sloupcového modulu matice **A** a tedy má tento modul dimenzi *n*.
Dokázali jsme tedy, že

$$\forall \mathbf{A}(n\times n)\exists \mathbf{B}: h(\mathbf{A}) = n \Leftrightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{E}, \qquad (170)$$

ke každé čtvercové matici **A** pak existuje matice **B** tak, že platí $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ právě když **A** je regulární.
Vyměníme-li nyní vzájemně úlohu matic **A** a **B** a zopakujeme znovu celý postup důkazu, zjistíme, že rovněž

$$\forall \mathbf{B}(n\times n)\exists \mathbf{A}: h(\mathbf{B}) = n \Leftrightarrow \mathbf{BA} = \mathbf{E}. \qquad (171)$$

Ke každé čtvercové matici **B** tedy existuje matice **A** tak, že platí $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$ právě když **B** je regulární.
Dle třetí věty matice pak musí platit rovněž i obrácené tvrzení

$$\forall \mathbf{A}(n\times n)\exists \mathbf{B}: h(\mathbf{A}) = n \Leftrightarrow \mathbf{BA} = \mathbf{E}. \qquad (172)$$

Provedeme-li negaci posledního výroku, máme

$$h(\mathbf{A}) \neq n \Leftrightarrow \forall \mathbf{B}(n\times n)\exists \mathbf{A}: \mathbf{BA} \neq \mathbf{E}. \qquad (173)$$

Není-li tedy **A** regulární, nemůže mít inverzní matici.
Nechť nyní **A** je regulární a nechť

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1\mathbf{A} &= \mathbf{E}, \\ \mathbf{AB}_2 &= \mathbf{E}. \end{aligned} \qquad (174)$$

Dle první věty matice máme

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1(\mathbf{AB}_2) = (\mathbf{B}_1\mathbf{A})\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_2, \qquad (175)$$

takže

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{A}^{-1}, \qquad (176)$$

čímž je dokázána jednoznačnost inverzní matice.

Pozorování:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \Leftrightarrow \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}. \qquad (177)$$

Regularita součinu matic

Jestliže **A**, **B** jsou dvě regulární matice téhož typu, potom **AB** je rovněž regulární matice.

Důkaz

Jestliže se nám podaří nalézt inverzní matici k **AB**, jsme s důkazem hotovi.
Tvrdíme, že hledanou maticí je

$$\left(\mathbf{AB}\right)^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \qquad (178)$$

Vskutku

$$\left(\mathbf{AB}\right)^{-1}\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right) = \mathbf{A}\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\right)\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AEA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}. \qquad (179)$$

***Příklad*:**

Vypočtěme inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}. \qquad (180)$$

***Řešení*:**

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 19 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & -8 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -11 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 8 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & 14 & -11 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -11 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & 14 & -11 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -11 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right). \qquad (181)$$

Dostáváme tedy výsledek

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (182)$$

Homogenní soustavy

Definice

Homogenní soustavou rozumíme maticovou rovnici tvaru

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}. \qquad (183)$$

První věta homogenní soustavy

Soustava homogenních lineárních rovnic (183) má vždy řešení. Množina všech jejích řešení tvoří vektorový prostor V, pro nějž platí

$$\dim V = n - h, \qquad (184)$$

kde n je počet neznámých a h je hodnost matice **A** soustavy (183).

Důkaz

Uvažujme homogenní soustavu

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{aligned} \qquad (185)$$

Soustava má zřejmě vždy tzv. **triviální řešení** (nulový vektor). Jestliže

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (v_1, \ldots, v_n), \\ \mathbf{w} &= (w_1, \ldots, w_n), \end{aligned} \qquad (186)$$

jsou dvě řešení této soustavy a jestliže $\alpha \in \mathbb{R}$, potom se snadno přesvědčíme, že rovněž i vektory

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}+\mathbf{w}=\left(v_1+w_1, \ldots, v_n+w_n\right), \\ &\alpha \mathbf{w}=\left(\alpha w_1, \ldots, \alpha w_n\right), \end{aligned} \qquad (\ 187\ )$$

jsou řešením téže soustavy. To ale znamená, že množina *V* všech řešení soustavy (185) je vektorovým podprostorem prostoru $\mathbb{R}^n$. Zbývá již jen dokázat rovnost (184). Gaussovou eliminační metodou můžeme soustavu (185) převést na tvar

$$\begin{aligned} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1h}x_h+\cdots+c_{1n}x_n&=0 \\ c_{22}x_2+\cdots+c_{2h}x_h+\cdots+c_{2n}x_n&=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ c_{hh}x_h+\cdots+a_{kn}x_n&=0 \end{aligned} \qquad (\ 188\ )$$

Příslušnou volbou posledních *n* – *h* neznámých a jednoznačným dopočítáním prvních *h* neznámých sestrojíme tuto soustavu *n* – *h* řešení:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_1=\left(u_{11}, \ldots, u_{1h}, 1, 0, \ldots, 0\right) \\ &\mathbf{u}_2=\left(u_{21}, \ldots, u_{2h}, 0, 1, \ldots, 0\right) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\mathbf{u}_{n-h}=\left(u_{(n-h)1}, \ldots, u_{(n-h)h}, 0, 0, \ldots, 1\right) \end{aligned} \qquad (\ 189\ )$$

Vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-h}$ jsou zřejmě lineárně nezávislé a každé řešení soustavy (183) je možno zapsat jako jejich lineární kombinaci, neboť každé řešení je jednoznačně určeno svými posledními *n* – *h* složkami. Vektory (189) tedy tvoří bázi prostoru *V* a jejich celkový počet *n* – *h* je tudíž dimenzí prostoru *V*.

Druhá věta homogenní soustavy

Množina *M* všech řešení soustavy nehomogenních lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \qquad (\ 190\ )$$

je rovna součtu $\mathbf{m} + V$ libovolného pevného řešení **m** soustavy (190) s vektorovým prostorem *V* všech řešení tzv. **přidružené soustavy** homogenních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned} \qquad (\ 191\ )$$

Důkaz

V zájmu stručného vyjadřování zapišme soustavy rovnic (190) a (191) ve tvaru

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j &= b_i, \qquad i \in \{1, \dots, m\}, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j &= 0, \qquad i \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned} \qquad (\ 192\ )$$

Dokážeme nyní, že $M = \mathbf{m} + V$. K tomu stačí dokázat pravdivost ekvivalence následujících dvou tvrzení:

$$\mathbf{w} \in M \Leftrightarrow \mathbf{w} \in \mathbf{m} + V. \qquad (\ 193\ )$$

$\Leftarrow$) Nechť vektor $\mathbf{y} \in V$. Potom $\mathbf{w} = \mathbf{m} + \mathbf{y}$. Vektor **m** je řešením první soustavy (192) a vektor **y** řešením druhé soustavy (192), čili

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} m_j = b_i,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = 0. \tag{194}$$

Chceme dokázat, že **w** je řešením první soustavy (192). Vskutku:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(m_j + y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} m_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = b_i + 0 = b_i \,. \tag{195}$$

$\Rightarrow$) Předpokládejme, že $\mathbf{w} = \left(\mathbf{m} + \mathbf{y}\right) \in M$, tj. vektor **w** řeší první soustavu (192). Dokažme, že $\mathbf{y} \in V$, tj. vektor **y** řeší druhou soustavu (192). Zřejmě

$$\mathbf{y} = \mathbf{w} - \mathbf{m} \tag{196}$$

a platí

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} m_j = b_i - b_i = 0 \,. \tag{197}$$

Homomorfismus

Definice zobrazení

Obecnou maticovou rovnici $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ můžeme chápat také jako zobrazení vektoru **x** na vektor **b** přes operátor **A**, což značíme

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\left(\mathbf{x}\right). \tag{198}$$

Monomorfismus a epimorfismus

Nechť $\left\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \right\rangle$ je báze vektorového prostoru *V*. Nechť dále

$$\forall \mathbf{u} \in V \exists! [\lambda_1, \dots, \lambda_n] \in T^n : \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i \,. \qquad (199)$$

Mějme zobrazení

$$f : V \to T^n ; \mathbf{f}(\mathbf{u}) = [\lambda_1, \dots, \lambda_n], \qquad (200)$$

pak platí

c) f je monomorfismus, čili injektivní zobrazení
d) f je epimorfismus, čili zobrazení na T^n.
e) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V; \forall c, d \in T : \mathbf{f}(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = c\mathbf{f}(\mathbf{u}) + d\mathbf{f}(\mathbf{v})$.

Důkaz

a) Jestliže

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{w}) = [\lambda_1, \dots, \lambda_n] \qquad (201)$$

pak

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{w} \,. \qquad (202)$$

b) Nechť $[\mu_1, \dots, \mu_n] \in T^n$. Položme

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \mathbf{v}_i \,. \qquad (203)$$

Potom

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = [\mu_1, \dots, \mu_n]. \qquad (204)$$

c) Nechť

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = [\lambda_1, \dots, \lambda_n],$$
$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) = [\mu_1, \dots, \mu_n]. \tag{205}$$

Potom

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i,$$
$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \mathbf{v}_i \tag{206}$$

Proto

$$c\mathbf{u} + d\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i \left(c\lambda_i + d\mu_i \right), \tag{207}$$

a tedy

$$\mathbf{f}(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = [c\lambda_1 + d\mu_1, c\lambda_2 + d\mu_2, \dots, c\lambda_n + d\mu_n] =$$
$$= c[\lambda_1, \dots, \lambda_n] + d[\mu_1, \dots, \mu_n] = c\mathbf{f}(\mathbf{u}) + d\mathbf{f}(\mathbf{v}). \tag{208}$$

Definice lineárního zobrazení

Nechť U, V jsou vektorové prostory, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$. Potom zobrazení $f: U \to V$ splňující předpoklad *c* předchozí věty nazveme lineárním zobrazením.

Druhá věta homomorfismu

Budiž $f: V \to W$ lineární zobrazení.

a) Je-li monomorfní, zachovává lineární nezávislost
b) Je-li epimorfní, zachovává vlastnost býti systémem generátorů.

Důkaz

a) buď *f* monomorfní a buď $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ nezávislý systém ve *V*. Je-li

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_i\right) = \mathbf{0}, \tag{209}$$

je

$$\mathbf{f}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i\right) = \mathbf{0} = \mathbf{f}\left(\mathbf{0}\right) \tag{210}$$

a tedy

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}. \tag{211}$$

Proto všechny α_i musí být nuly.

b) Buď $M \subseteq V$, $L\left(M\right) = V$, $\mathbf{y} \in W$. Je-li *f* epimorfní, je $\mathbf{y} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right)$ pro nějaké $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$. Toto **x** lze lineárně nakombinovat jako

$$\sum \alpha_j \mathbf{x}_j \tag{212}$$

pro nějaká $\mathbf{x}_j \in M$, a tedy

$$\mathbf{y} = \sum \alpha_j \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_j\right). \tag{213}$$

Proto $f\left[M\right]$ generuje *W*.

Komposice lineárních zobrazení

Nechť $f : U \to V, \quad g : V \to W$ jsou lineární zobrazení. Potom

$$g \circ f : U \to W \qquad (214)$$

je rovněž lineární zobrazení.

Důkaz

Budiž $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$, tj. $\mathbf{g}\big(\mathbf{f}(\mathbf{u})\big) = g \circ f$.
Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$; $c, d \in T$, pak platí

$$\mathbf{g}\big(\mathbf{f}(c\mathbf{u} + d\mathbf{v})\big) = \mathbf{g}\big(c\mathbf{f}(\mathbf{u}) + d\mathbf{f}(\mathbf{v})\big) = c\mathbf{g}\big(\mathbf{f}(\mathbf{u})\big) + d\mathbf{g}\big(\mathbf{f}(\mathbf{v})\big). \qquad (215)$$

Definice jádra lineárního zobrazení

Nechť $f : U \to V$ je lineární zobrazení. Potom množinu

$$\ker(f) \equiv \{\mathbf{u} \in U : \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\} \qquad (216)$$

nazveme jádrem tohoto zobrazení.

Definice obrazu lineárního zobrazení

Nechť $f : U \to V$ je lineární zobrazení. Potom množinu

$$\mathrm{Rn}(f) \equiv \{\mathbf{v} \in V \ \exists \mathbf{u} \in U : \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{v}\} \qquad (217)$$

nazveme obrazem tohoto zobrazení.

Čtvrtá věta homomorfismu

Nechť $f : U \to V$ je lineární zobrazení. Potom

a) $\ker(f)$ je vektorový podprostor prostoru U
b) $\mathrm{Rn}(f)$ je vektorový podprostor prostoru V

Důkaz

a) Nechť $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\ker(f)$. Máme dokázat, že $c\mathbf{u}+d\mathbf{v}\in\ker(f)$. Vskutku

$$\mathbf{f}(\mathbf{u})=\mathbf{0}=\mathbf{f}(\mathbf{v})\Rightarrow\mathbf{f}(c\mathbf{u}+d\mathbf{v})=c\mathbf{f}(\mathbf{u})+d\mathbf{f}(\mathbf{v})=c\cdot\mathbf{0}+d\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}, \tag{218}$$

což dle definice vektorového podprostoru znamená, že skutečně

$$\ker(f)\subseteq U. \tag{219}$$

b) Nechť $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathrm{Rn}(f)$. Máme dokázat, že $c\mathbf{u}+d\mathbf{v}\in\mathrm{Rn}(f)$. Nechť tedy

$$\exists\mathbf{x},\mathbf{y}\in U:\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{u},\mathbf{f}(\mathbf{y})=\mathbf{v}. \tag{220}$$

Uvažujme dále vektor

$$\mathbf{w}=c\mathbf{x}+d\mathbf{y}\in U. \tag{221}$$

Potom platí:

$$\mathbf{f}(\mathbf{w})=\mathbf{f}(c\mathbf{x}+d\mathbf{y})=c\mathbf{f}(\mathbf{x})+d\mathbf{f}(\mathbf{y})=c\mathbf{u}+d\mathbf{v}, \tag{222}$$

což dle definice obrazu znamená, že opravdu

$$c\mathbf{u}+d\mathbf{v}\in\mathrm{Rn}(f), \tag{223}$$

čímž je věta dokázána.

Inverzní zobrazení

Nechť $f : U \to V$ je monomorfismus. Potom rovněž $f^{-1} : \mathrm{Rn}(f) \to U$ je monomorfismus.

Důkaz

Nechť $c, d \in T; \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{Rn}(f)$. Máme dokázat, že

$$\mathbf{f}^{-1}(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = c\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{u}) + d\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{v}). \qquad (224)$$

Protože

$$\exists! \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U : \left[\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}, \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{v}\right] \Leftrightarrow \left[\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{u}) = \mathbf{x}, \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{y}\right], \qquad (225)$$

platí

$$\mathbf{f}(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = c\mathbf{f}(\mathbf{x}) + d\mathbf{f}(\mathbf{y}) = c\mathbf{u} + d\mathbf{v}, \qquad (226)$$

a tedy

$$\mathbf{f}^{-1}(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = c\mathbf{x} + d\mathbf{y} = c\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{u}) + d\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{v}), \qquad (227)$$

čímž je věta dokázána.

Důsledek

Je-li lineární zobrazení $f : U \to V$ monomorfní a epimorfní, jest to izomorfismus, neboli bijekce.

Důkaz

Budiž f^{-1} zobrazení inverzní k *f*. Máme dokázat, že je rovněž lineární. To jsme však právě učinili v předešlé větě.

Vlastnosti inverzního zobrazení

a) Nechť $\mathbf{x} \in f^{-1}(\mathbf{y})$ a nechť $\mathbf{z} = \ker(f)$. Potom $\mathbf{x} + \mathbf{z} \in \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$.
b) Nechť $\mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$, potom $\mathbf{x} - \mathbf{v} \in \ker(f)$.

Důkaz

a) $\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, (228)
b) $\mathbf{f}(\mathbf{x}-\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{y} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$. (229)

Sedmá věta homomorfismu

Nechť $f : U \to V$ je lineární zobrazení. Potom platí ekvivalence výroků:

$$f \text{ je monomorfismus } \Leftrightarrow \ker(f) = \{\mathbf{0}\}. \qquad (230)$$

Důkaz

$\Rightarrow$) Nechť f je monomorfní, $\mathbf{y} \in \ker(f)$. Potom $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{0}$.
$\Leftarrow$) $x, y \in V, x \neq y \Rightarrow x - y \neq 0 \Rightarrow f(x-y) \neq 0 \Rightarrow f(x) - f(y) \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Definice defektu homomorfismu

Nechť $f : U \to V$ je lineární zobrazení. Potom číslo

$$\operatorname{def}(f) = \dim \ker(f) \qquad (231)$$

nazveme defektem tohoto zobrazení.

Definice hodnosti homomorfismu

Nechť $f : U \to V$ je lineární zobrazení. Potom číslo

$$\mathrm{h}\left(f\right)=\dim \mathrm{Rn}\left(f\right) \tag{232}$$

nazveme hodností tohoto zobrazení.

Osmá věta homomorfismu

Nechť $f:V\to W$ je lineární zobrazení. Potom platí rovnost

$$\dim U=\mathrm{def}\left(f\right)+\mathrm{h}\left(f\right). \tag{233}$$

Důkaz

Nechť $\left\langle \mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m\right\rangle$ je báze $\mathrm{Rn}\left(f\right)$, a nechť $\left\langle \mathbf{z}_1,\dots,\mathbf{z}_m\right\rangle$ je báze $\ker\left(f\right)$. Najděme pro každé $i=1,\dots,m$ nějaké $\mathbf{v}_i$ takové, že

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{v}_i\right)=\mathbf{w}_i. \tag{234}$$

Potom systém $\left\langle \mathbf{z}_1,\dots,\mathbf{z}_m,\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m\right\rangle$ je bází prostoru V neboť je-li $\mathbf{v}\in V$ a píšeme-li jednoznačně

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{v}\right)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_1\mathbf{w}_i\,, \tag{235}$$

plyne odtud, že

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{v}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{v}_i\right)=\mathbf{f}\left(\mathbf{v}\right)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{w}_i=\mathbf{0}. \tag{236}$$

Proto musí existovat jednoznačně určené koeficienty $\mu_1,\dots,\mu_k$ takové, že

$$\mathbf{v}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{v}_i=\sum_{j=1}^{k}\mu_j\mathbf{z}_j=\mathbf{0}, \tag{237}$$

tj.

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{v}_i+\sum_{j=1}^{k}\mu_j\mathbf{z}_j, \tag{238}$$

odkud již snadno plyne dokazované tvrzení.

Devátá věta homomorfismu

Nechť $f:V\rightarrow W$ je lineární zobrazení. Nechť dále

$$\begin{aligned}&\dim V=n,\\&\dim W=m.\end{aligned} \tag{239}$$

Potom

a) $n<m\Rightarrow f$ není epimorfní
b) $n>m\Rightarrow f$ není monomorfní
c) $n=m\Rightarrow f$ je izomorfismus

Důkaz

a) Je zřejmé, že $\mathrm{Rn}(f)\subset W$
b) Zřejmě platí $U\subset\mathrm{Rn}(f)$
c) V tomto případě je podle sedmé věty homomorfismu

$$\mathrm{def}(f)=0. \tag{240}$$

Protože podle osmé věty homomorfismu platí

$$\dim V=\mathrm{def}(f)+\mathrm{h}(f), \tag{241}$$

plyne odtud rovnost

$$\dim V = \mathrm{h}\left(f \right). \tag{242}$$

Tedy skutečně

$$n = m \Rightarrow \mathrm{Rn}\left(f \right) = W . \tag{243}$$

***Příklad*:**

Nechť je dán operátor

$$f = \begin{pmatrix} 1+i & -2 & 2i \\ -i & 1-i & 2-3i \\ 0 & 3 & \lambda - i \end{pmatrix}. \tag{244}$$

a) Určeme parametr λ tak, aby $\operatorname{def}\left(f \right) = 1$.
b) Pro tento parametr najděme $\ker\left(f \right)$ a $h\left(f \right)$.

***Řešení*:**

Hledáme všechny vektory $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$, které se přes operátor *f* zobrazí na nulu, neboli řešíme homogenní soustavu

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x} \right) = \mathbf{0}. \tag{245}$$

Gaussovou eliminační metodou dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+i & -2 & 2i & 0 \\ -i & 1-i & 2-3i & 0 \\ 0 & 3 & \lambda-i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1+i & -2 & 2i & 0 \\ 0 & -2i & 1-2i & 0 \\ 0 & 3 & \lambda-i & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1+i & -2 & 2i & 0 \\ 0 & -2i & 1-2i & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3-5/2i & 0 \end{array}\right). \tag{246}$$

Odtud

$$\lambda = 3 + \frac{5}{2}i\,. \tag{247}$$

Potom

$$\begin{aligned} (1+i)x_1 - 2x_2 + 2ix_3 &= 0 \\ -2ix_2 + (1-2i)x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{248}$$

a máme prostor

$$\mathrm{Rn}(f) = L\langle (1+i,-2,2i),(0,-2i,1-2i) \rangle \tag{249}$$

dimenze

$$h(f) = 2, \tag{250}$$

a jádro

$$\ker(f) = L\left\langle \left(-\frac{5}{2} - \frac{i}{2}, -1 - \frac{i}{2}, 1 \right) \right\rangle \tag{251}$$

dimenze

$$\operatorname{def}(f) = 1. \tag{252}$$

Transformace souřadnic vektoru, operátor zobrazení mezi bázemi

Nechť $B_1 = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$, $B_2 = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$ jsou báze prostoru V. Nechť dále $[\lambda_1, \ \ldots \ , \lambda_n]$ jsou souřadnice $\mathbf{u}$ vzhledem k B_1, $[\mu_1, \ \ldots \ , \mu_n]$ jsou souřadnice $\mathbf{u}$ vzhledem k B_2. Každý bázový vektor $\mathbf{v}_i \in V$ lze lineárně nakombinovat prostřednictvím koeficientů a_{ij}, tvořených i-tou složkou souřadnic vektoru $\mathbf{v}_j$ vzhledem k bázi B_2:

$$\mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathbf{u}_i \ . \qquad (253)$$

Nechť

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mu_j \right)}_{\lambda_i} \mathbf{u}_i \ . \qquad (254)$$

Celou konstrukci lze zobecnit pro případ, kdy báze B_1, B_2 mají navzájem různý počet vektorů (transformujeme mezi dvěma různými vektorovými prostory V_n a U_m kde horní index označuje dimenzi). Potom zcela analogicky k (254) platí

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \mu_j \right)}_{\lambda_i} \mathbf{u}_i \ . \qquad (255)$$

Koeficienty a_{ik} pak, na rozdíl od předchozího případu, netvoří čtvercovou matici typu ($n \times n$), ale obdélníkovou matici typu ($m \times n$): $\left\{ a_{i=1\ldots m,\, j=1\ldots n} \right\}$. Tuto matici nazýváme **operátorem zobrazení mezi bázemi B_1 a B_2**.

***Příklad*:**

Nechť **A** je operátor zobrazení g mezi bázemi B_U, B_V, a nechť dále **B** je operátor zobrazení f mezi bázemi B_V, B_W.
Najdi operátor kompozice zobrazení $f \circ g : U \to W$ mezi bázemi B_U, B_W.

***Řešení*:**

Má-li **v** souřadnice $[\lambda_1, \ \dots \ , \lambda_n]$ (generátory výchozího prostoru), pak má **g**(**v**) souřadnice $[\mu_1, \ \dots \ , \mu_m]$, kde

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_j \ . \qquad (256)$$

Proto **f**(**g**(**v**)) má souřadnice $[\omega_1, \ \dots \ , \omega_l]$ (generátory cílového prostoru), pro něž platí:

$$\omega_k = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} \mu_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ki} a_{ij} \lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij} \right)}_{\mathbf{C}(l \times n) = \mathbf{B}(l \times m) \cdot \mathbf{A}(m \times n)} \lambda_j \ . \qquad (257)$$

Jak vidno, je operátor kompozice dvou různých zobrazení

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij} \ , \qquad (258)$$

tvořen součinem operátorů zobrazení jednotlivých složek této kompozice. Tato vlastnost je významnou především v tzv. tenzorové algebře, o níž budeme hovořit později.

Operátor přechodu

Nechť $f:V\to W$ je lineární zobrazení, které má matici **A** vzhledem k bázím $\alpha=\langle \mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\rangle$ a $\beta=\langle \mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n\rangle$, a matici **B** vůči bázím $\alpha'=\langle \mathbf{v}'_1,\dots,\mathbf{v}'_n\rangle$ a $\beta'=\langle \mathbf{w}'_1,\dots,\mathbf{w}'_n\rangle$. Nechť

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'_i&=\sum_{i'} c_i^{i'}\mathbf{v}_{i'},\\ \mathbf{w}'_j&=\sum_{j'} d_j^{j'}\mathbf{w}'_{j'}.\end{aligned} \qquad (259)$$

pak

$$\mathbf{B}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{AC}. \qquad (260)$$

Matici **C** nazýváme maticí přechodu od báze α k bázi α'. Ve svých sloupcích má matice **C** zapsány souřadnice vektorů nové báze α' vůči původní bázi α.
Souřadnice x^i vektoru **x** v bázi α, tj.

$$\mathbf{x}=\sum_i x^i\mathbf{v}_i \qquad (261)$$

a podobně souřadnice x'^i vektoru **x** v bázi α', jsou navzájem svázány transformací

$$x^i=\sum_j c_j^i x'^j\ , \qquad (262)$$

čili

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix}. \tag{263}$$

Důkaz

Přechod od nečárkované báze k čárkované je

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_n \rangle &= \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{C}, \\ \langle \mathbf{w}'_1, \ldots, \mathbf{w}'_n \rangle &= \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle \mathbf{D}. \end{aligned} \tag{264}$$

Výraz

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}_i) = \sum a_i^j \mathbf{w}_j \tag{265}$$

znamená

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{v}_1), \ldots, \mathbf{f}(\mathbf{v}_n) \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle \mathbf{A} \tag{266}$$

a podobně

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{v}'_1), \ldots, \mathbf{f}(\mathbf{v}'_n) \rangle = \langle \mathbf{w}'_1, \ldots, \mathbf{w}'_n \rangle \mathbf{B}. \tag{267}$$

Zkombinujeme-li nyní rovnost (267) s druhou rovností (264), dostaneme první část důkazu

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{v}'_1), \ldots, \mathbf{f}(\mathbf{v}'_n) \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle \mathbf{DB}. \tag{268}$$

Naopak, provedeme-li lineární transformaci rovnosti

$$\mathbf{v}'_i = \sum c_i^k \mathbf{v}_k \tag{269}$$

z předpokladu věty, potom máme

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{v}'_i\right)=\sum c_i^k \mathbf{f}\left(\mathbf{v}_k\right). \qquad (270)$$

Dosazením do (266) odtud plyne druhá část důkazu

$$\left\langle \mathbf{f}\left(\mathbf{v}'_1\right),\dots,\mathbf{f}\left(\mathbf{v}'_n\right)\right\rangle=\left\langle \mathbf{f}\left(\mathbf{v}_1\right),\dots,\mathbf{f}\left(\mathbf{v}_n\right)\right\rangle \mathbf{C}=\left\langle \mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n\right\rangle \mathbf{AC}. \qquad (271)$$

Porovnáním obou částí obdržíme dokazovanou rovnost

$$\mathbf{AC}=\mathbf{DB}\Rightarrow \mathbf{B}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{AC}. \qquad (272)$$

Důsledek

Nechť $f:V\to W$ je lineární zobrazení z předešlé věty, mající obě báze stejné, tj. platí $V = W$, $\alpha=\beta$, potom

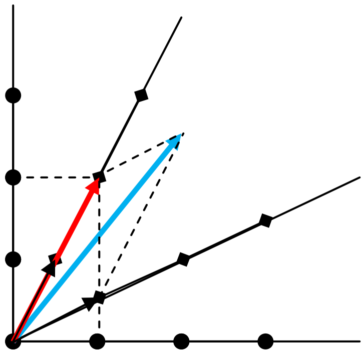
$$\mathbf{B}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}. \qquad (273)$$

Definice podobnosti matic

Matice **A**, **B**, pro něž existuje matice **C** splňující rovnost (273) nazýváme podobnými maticemi a značíme $\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$.

***Příklad*:**

Mějme dvě různé báze prostoru V^2, které vidíme zakresleny na obrázku 1. Osy jedné báze jsou ocejchovány puntíky, osy druhé báze kosočtverci.



Obr.1 Vzájemné zobrazení mezi dvěma bázemi

a) Najdi operátor zobrazení mezi těmito dvěma bázemi
b) Vypočti operátor přechodu z puntíkaté báze do kosočtverečné báze a vypočti v kosočtverečné bázi souřadnice červeně vyznačeného vektoru, který má v puntíkaté bázi souřadnice [1;2]
c) S pomocí operátoru přechodu z kosočtverečné do puntíkaté báze vypočti v puntíkaté bázi souřadnice modře vyznačeného vektoru, který má v kosočtverečné bázi souřadnice [1;2]

***Řešení*:**

a) V kosočtverečné bázi zvolíme dva bázové vektory (1;0), (0;1) (na obrázku 1 vyznačeny černými šipkami) a zobrazíme jejich souřadnice, přes operátor zobrazení **A,** do puntíkaté báze. Okamžitě vidíme, že úloha vede na maticovou soustavu

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1/2\end{pmatrix},\qquad\qquad (274)$$
$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}.$$

Rozepsána do složek, tato soustava říká, že

$$a_{11} = 1;\ a_{21} = \frac{1}{2},$$
$$a_{12} = \frac{1}{2};\ a_{22} = 1. \qquad (275)$$

Hledaný operátor zobrazení má tedy tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (276)$$

Vidíme, že má vskutku ve sloupcích souřadnice původních bázových vektorů v nové bázi.

b) Operátorem přechodu z puntíkaté báze do kosočtverečné je operátor inverzní k operátoru zobrazení, tedy

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 \\ -2/3 & 4/3 \end{pmatrix}. \qquad (277)$$

Souřadnice červeně vyznačeného vektoru, vzhledem ke kosočtverečné bázi, tedy získáme coby zobrazení

$$\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad (278)$$

c) Operátorem přechodu z kosočtverečné báze do puntíkaté, je zřejmě samotný operátor zobrazení **A**. Souřadnice modře vyznačeného vektoru vzhledem k puntíkaté bázi proto získáme jako zobrazení

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5/2 \end{pmatrix}. \qquad (279)$$

Definice stopy matice

Součet diagonálních prvků čtvercové matice **A** nazýváme stopou této matice a značíme $\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}$.

Cykličnost stopy

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{AB} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{BA} \tag{280}$$

Důkaz

Tvoří-li matice **A**, **B** vůči operaci násobení abelovskou grupu, není o čem přemýšlet. V opačném případě dokážeme cykličnost stopy prostou záměnou pořadí sumace a přejmenováním sumačních indexů:

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{AB} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a^i_j b^j_i = \mathrm{Tr}\,\mathbf{BA} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b^i_j a^j_i \,. \tag{281}$$

Důsledek

Stopy podobných matic **A**, **B** jsou schodné

Důkaz

Podle definice podobnosti máme

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{BC} = \mathbf{A} \tag{282}$$

a z předešlé věty pak plyne

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = \mathrm{Tr}\,\left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{BC}\right) = \mathrm{Tr}\,\left(\mathbf{BCC}^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\,\mathbf{B}. \tag{283}$$

Determinant matice

Definice inverze permutace

Nechť P_i je permutace $a_1, \dots, a_n$ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Uspořádanou dvojici prvků permutace P_i nazveme inverzí permutace P_i právě tehdy, platí-li

$$i < j \Rightarrow a_i > a_j . \qquad (\ 284\ )$$

Definice stupně permutace

Počet inverzí v dané permutaci P_i nazveme stupněm této permutace a značíme jako s_{P_i}.

Definice parity permutace

Číslo

$$\Pi_{P_i} = (-1)^{s_{P_i}} \qquad (\ 285\ )$$

nazýváme paritou permutace P_i. Je-li s_{P_i} liché číslo, hovoříme o tzv. liché paritě permutace P_i, které operátor (285) přiřazuje hodnotu -1. Pokud je s_{P_i} sudé číslo, hovoříme o tzv. sudé paritě permutace P_i, které operátor (285) přiřazuje hodnotu +1.

Definice transpozice permutace

Vzájemnou záměnu dvou sousedních prvků permutace P_i nazýváme transpozicí této permutace. Zaměníme-li v permutaci navzájem prvky $a_i, a_j : j = i + 1$, (zaměňujeme dva sousední prvky, tj. provádíme transpozici), pak se počet inverzí změní o jednotku.

Věta o výměně prvků

Vyměníme-li v dané permutaci navzájem dva prvky, změní se parita této permutace.

Důkaz

Zaměňme v permutaci navzájem prvky $a_i, a_j, (i < j)$.
Tuto záměnu lze vždy realizovat postupně pomocí počtu

$$(j-i)+(j-i-1)=2(j-i)-1 \qquad (286)$$

transpozic, tj. lichého počtu transpozic. Počet inverzí se tím změní o liché číslo, pročež tvrzení platí.

***Příklad*:**

Budiž dána permutace $P=(2,1,3)$. Zřejmě je s_P=1. Ukažme, že záměnou jejích dvou krajních prvků získáme permutaci sudého stupně. Tuto záměnu můžeme docílit dle předešlé věty postupnými záměnami sousedních prvků, tj. transpozic:

$$\begin{array}{lll} (\underline{2,1},3) & : & s_P = 1 \\ (1,2,3) & : & s_P = 0 \\ (1,3,2) & : & s_P = 1 \\ (3,1,2) & : & s_P = 2 \end{array} \qquad (287)$$

Záměnu jsme tedy vskutku realizovali prostřednictvím lichého počtu (3) transpozic, které mění stupeň permutace vždy o jednotku. Výsledná permutace se proto změnila z původní liché na sudou a parita permutace změnila znaménko.

Levi-Civitův permutační symbol

Definujme číslo

$$e_{j_1 j_2 \cdots j_n} = \operatorname{sgn}\left[(j_2 - j_1) \cdots (j_n - j_1)(j_n - j_1) \cdots (j_n - j_{n-1}) \right]. \qquad (\ 288\ )$$

Z této definice je zřejmé, že symbol (288) je antisymetrický (měnící znaménko) vůči každé vzájemné výměně libovolných dvou svých indexů. Jsou-li alespoň dva indexy stejné, pak ve shodě s (288) je $e_{j_1 j_2 \cdots j_n} = 0$. Z definice je zřejmé, že Levi-Civitův permutační symbol pro všechna j_i navzájem různá reprezentuje operátor parity permutace.

Tullio Levi-Civita (1873 – 1941)

Definice determinantu matice

Číslo

$$\det \mathbf{A} = \sum_{P=(j_1, \ldots, j_n)}^{n!} (-1)^{s_P} \cdot x_{1 j_1} x_{2 j_2} \cdots x_{n j_n} = \sum_{P=(j_1, \ldots, j_n)}^{n!} \left(\Pi_P \cdot \prod_{i=1}^{n} x_{i j_i} \right) =$$

$$= \sum_{j_1 \cdot j_n = 1}^{n} \left(\Pi_P \cdot \prod_{i=1}^{n} x_{i j_i} \right) = \sum_{j_1 \cdot j_n = 1}^{n} \left(e_{j_1, \ldots, j_n} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_{i j_i} \right),$$

(289)

v němž suma probíhá přes všechny permutace $P = (j_1, \ldots, j_n)$ množiny $\{1, \ldots, n\}$ sloupcových indexů matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \vdots & x_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (290)$$

nazýváme determinantem matice **A**.

***Příklad*:**

Spočtěme determinant obecné matice stupně 3×3. Budou nás tedy zajímat všechny permutace třetí třídy, kterých je celkem $3! = 6$:

$$\begin{array}{lllll} (1,2,3) & : & s_P = 0 & : & e_{123} = \Pi_P = +1 \\ (1,3,2) & : & s_P = 1 & : & e_{132} = \Pi_P = -1 \\ (2,3,1) & : & s_P = 2 & : & e_{231} = \Pi_P = +1 \\ (2,1,3) & : & s_P = 1 & : & e_{213} = \Pi_P = -1 \\ (3,1,2) & : & s_P = 2 & : & e_{312} = \Pi_P = +1 \\ (3,2,1) & : & s_P = 3 & : & e_{321} = \Pi_P = -1 \end{array} \qquad (291)$$

Podle definice nyní spočteme hledaný determinant

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= x_{11}x_{22}x_{33} - x_{11}x_{23}x_{32} + x_{12}x_{23}x_{31} - x_{12}x_{21}x_{33} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{13}x_{22}x_{31} \qquad (292)$$

***Pozorování*:**

Pro matice stupně ≤ 3 je možno použít pro výpočet determinantu tzv.

Sarusovo pravidlo.

***Sarrusovo pravidlo*:**

Determinant počítané matice označujeme často též jako matici se svislými závorkami namísto kulatých, obsahující stejné prvky jako původní matice. Při počítání determinantu Sarusovým pravidlem opíšeme prvky této nové matice ještě jednou pod matici a poté je spolu násobíme podél diagonál, jak naznačují šikmé linie ve schématu (293).

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} \left| \begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{matrix} \right| \\ \begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{matrix} \end{array} =$$

$$= x_{11}x_{22}x_{33} - x_{11}x_{23}x_{32} + x_{12}x_{23}x_{31} - x_{12}x_{21}x_{33} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{13}x_{22}x_{31} \qquad (293)$$

Jednotlivé diagonální součiny poté sečteme, pouze musíme dbát toho, že součiny probíhající podél hlavních diagonál (zleva doprava) mají vždy sudou paritu a tedy je násobíme číslem +1, zatímco součiny probíhající po vedlejších diagonálách (zprava doleva) mají vždy lichou paritu a proto je musíme ještě vynásobit číslem -1. Nevýhodou této jednoduché metody je skutečnost, že funguje pouze pro determinanty matic nejvýše 3. stupně.

Pierre Frédéric Sarrus (1798 – 1861)

***První věta determinantu*:**

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \tag{294}$$

Důkaz

Při výpočtu determinantu transponované matice se pouze navzájem vymění řádkové a sloupcové indexy. Jak plyne z definice determinantu, hodnota determinantu se tím nezmění.

***Příklad*:**

Budiž dány determinanty matic třetího stupně:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = \sum_{P=(a_1,\,a_2,\,a_3)}^{3!} \left(\Pi_P \cdot \prod_{i=1}^{3} x_{ia_i} \right) =$$

$$= x_{11}x_{22}x_{33} - x_{11}x_{23}x_{32} + x_{12}x_{23}x_{31} - x_{12}x_{21}x_{33} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{13}x_{22}x_{31} \tag{295}$$

$$\det \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= x_{11}x_{22}x_{33} - x_{11}x_{32}x_{23} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{21}x_{12}x_{33} + x_{31}x_{12}x_{23} - x_{31}x_{22}x_{13} \tag{296}$$

Prohodíme-li navzájem řádkové a sloupcové indexy determinantu, jednotlivé prvky determinantu si navzájem vymění místo, jak naznačují oblouky ve schématech (295), (296). Žádný nový člen se ale v rozvoji na pravé straně (295), (296) neobjeví, ani žádný nezanikne. Rovněž znaménka, jak patrno, zůstávají beze změny. Hodnota determinantu transponované matice tedy vskutku zůstala stejná, jako hodnota determinantu matice původní.

Druhá věta determinantu

Vyměníme-li v determinantu čtvercové matice vzájemně dva řádky resp. sloupce, determinant tím pouze změní znaménko, jeho absolutní hodnota ale zůstane beze změny.

Důkaz

Prohodíme-li vzájemně dva řádky resp. sloupce v matici, změní se dle věty o výměně prvků parita všech permutací, a jak plyne z definice determinantu, přepóluje se tím i znaménko determinantu této matice.

***Příklad*:**

Mějme dvě čtvercové matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{11} & x_{12} \end{pmatrix}. \tag{297}$$

Zřejmě

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}, \\ \det \mathbf{B} &= x_{21}x_{12} - x_{22}x_{11} = -\left(x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} \right) = -\det \mathbf{A}. \end{aligned} \tag{298}$$

Třetí věta determinantu

Obsahuje-li matice **A** dva stejné řádky či sloupce, potom $\det \mathbf{A} = 0$.

Důkaz

Oba shodné řádky (sloupce) navzájem prohodíme, čímž obdržíme pochopitelně tutéž matici **A**. Její determinant však podle druhé věty determinantu musí změnit znaménko. Dostáváme tak rovnici

$$\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A}, \qquad (299)$$

která má jediné řešení

$$\det \mathbf{A} = 0. \qquad (300)$$

Věta o rozvoji determinantu

Pro obecný determinant *n*-tého stupně platí rovnost

$$\det \mathbf{A} = \sum_{P=(a_1,\ldots,a_n)}^{n!} \left(\Pi_P \cdot \prod_{i=1}^{n} x_{ia_i} \right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} x_{ij} \left| A_{ij} \right| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} x_{ij} \left| A_{ij} \right|, \qquad (301)$$

kde $\left| A_{ij} \right|$ je tzv. algebraický doplněk prvku a_{ij}. Jedná se o determinant submatice (neboli subdeterminant), vzniklé vynecháním *i*-tého řádku a *j*-tého sloupce původní matice **A**.

Důkaz

Z první věty determinantu plyne, že důkaz stačí provést pouze např. pro rozvoj podle *i*-tého řádku, neboť první věta nám zaručuje, že tvrzení vyslovená o determinantech matic vzhledem k jejich řádkům platí zcela obdobně rovněž i vzhledem k jejich sloupcům a naopak. Snadno se lze přesvědčit, že pro determinanty stupně $n \leq 3$ tvrzení platí – např. pro determinant 3. stupně Sarusovým pravidlem dostáváme:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= x_{11}x_{22}x_{33} - x_{11}x_{23}x_{32} + x_{12}x_{23}x_{31} - x_{12}x_{21}x_{33} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{13}x_{22}x_{31} = \\
&= x_{11}\left(x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32}\right) + x_{12}\left(x_{23}x_{31} - x_{21}x_{33}\right) + x_{13}\left(x_{21}x_{32} - x_{22}x_{31}\right) = \\
&= x_{11}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} + x_{12}\begin{vmatrix} x_{23} & x_{21} \\ x_{33} & x_{31} \end{vmatrix} + x_{13}\begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix} = \\
&= x_{11}\left|A_{11}\right| - x_{12}\left|A_{12}\right| + x_{13}\left|A_{13}\right| = \\
&= \left(-1\right)^2 x_{11}\left|A_{11}\right| + \left(-1\right)^3 x_{12}\left|A_{12}\right| + \left(-1\right)^4 x_{13}\left|A_{13}\right|
\end{aligned} \tag{302}$$

Označme $\left|A_{ij}^*\right| = \left(-1\right)^{i+j}\left|A_{ij}\right|$ a předpokládejme, že vztah

$$\det \mathbf{A} \equiv D_n = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\left|A_{ij}^*\right| \tag{303}$$

platí pro všechny determinanty D_{m-1} matic řádu m – 1. Dokažme, že pak platí i pro determinanty D_m matic řádu m.
Rozvojem determinantu D_m matice **A** podle prvního řádku dostaneme

$$\det \mathbf{A} \equiv D_m = \sum_{j=1}^{m} x_{ij}\left|A_{1j}^*\right|. \tag{304}$$

Protože $\left|A_{1j}^*\right|$ jsou subdeterminanty (tzv. **algebraické doplňky)** řádu m – 1, můžeme je rozvinout podle řádku i – 1, ($i \geq 2$) matice A_{1j}^* neboli podle i-tého řádku matice **A**:

$$\left|A_{1j}^*\right| = \sum_{k=1}^{j-1} x_{ik}\left|A_{1j,ik}^*\right| + \sum_{k=j+1}^{m} x_{ik}\left|A_{1j,ik}^*\right|. \tag{305}$$

Přitom platí

$$\left|A^{*}_{1j,ik}\right| = \left|A^{*}_{ik,1j}\right| = (-1)^{1+i+j+k}\left|A_{1j,ik}\right|, \tag{306}$$

kde $A_{1j,ik}$ je determinant submatice řádu m – 2, která vznikne z matice A_{1j} vynecháním i-tého řádku a k-tého sloupce vzhledem k původní matici **A**. Odtud máme výsledek

$$D_m = \sum_{j=1}^{m} x_{1j}\left(\sum_{k=1}^{j-1} x_{ik}\left|A^{*}_{1j,ik}\right| + \sum_{k=j+1}^{m} x_{ik}\left|A^{*}_{1j,ik}\right|\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} x_{ik}\left(\sum_{j=1}^{k-1} x_{1j}\left|A^{*}_{ik,1j}\right| + \sum_{j=k+1}^{m} x_{ij}\left|A^{*}_{ik,1j}\right|\right) = \sum_{k=1}^{m} x_{ik}\left|A^{*}_{ik}\right| = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{i+j} x_{ik}\left|A_{ij}\right|. \tag{307}$$

Pátá věta determinantu

Vynásobíme-li některý řádek, resp. sloupec čtvercové matice **A** číslem $\alpha \in \mathbb{R}$, potom determinant nové matice $\mathbf{A}'$ se rovná

$$\alpha \det \mathbf{A}. \tag{308}$$

Důkaz

Vynásobíme-li číslem α i-tý řádek matice **A**. Provedeme-li rozvoj determinantu matice $\mathbf{A}'$ podle i-tého řádku, dostáváme postupně

$$\det \mathbf{A}' = (\alpha x_{i1}) A'_{i1} + \cdots + (\alpha x_{in}) A'_{in} = \alpha (x_{i1} A_{i1} + \cdots + x_{in} A_{in}) = \alpha \det \mathbf{A}, \tag{309}$$

neboť zřejmě

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} : A'_{ij} = A_{ij}. \tag{310}$$

Šestá věta determinantu

Je-li některý řádek, resp. sloupec čtvercové matice **A** lineární kombinací ostatních řádků, resp. sloupců, potom

$$\det \mathbf{A} = 0 . \tag{311}$$

Důkaz

Označme *i*-tý řádek a *j*-tý řádek pořadě *I*, *J*. Nechť *i*-tý řádek je *n*-násobkem *j*-tého řádku, tj.

$$\exists n \in \mathbb{R} : I = nJ . \tag{312}$$

Vynásobme nyní řádek *J* číslem *n*, čímž obdržíme dle páté věty determinantu matici $\mathbf{A}'$, jejíž determinant je *n*-násobkem determinantu původní matice **A**, neboli

$$\det \mathbf{A}' = n \cdot \det \mathbf{A} . \tag{313}$$

Protože však matice $\mathbf{A}'$ má nyní dva stejné řádky *I* = *nJ*, musí být dle třetí věty determinantu

$$\det \mathbf{A}' = 0 . \tag{314}$$

Dosadíme-li poslední rovnost do (313), dostáváme rovnici

$$n \cdot \det \mathbf{A} = 0 , \tag{315}$$

která má řešení

$$\det \mathbf{A} = 0 \vee n = 0 . \tag{316}$$

Druhé řešení ovšem znamená, že v matici **A** existuje nulový řádek. Vynásobíme-li tento řádek libovolným číslem $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, matice **A** a tudíž ani její determinant se tím nikterak nezmění, neboli platí

$$\det \mathbf{A}' = \det \mathbf{A} . \tag{317}$$

Protože ale dle páté věty determinantu musí zároveň být

$$\det \mathbf{A}' = \alpha \det \mathbf{A} \tag{318}$$

plyne odtud automaticky ekvivalence

$$n = 0 \Leftrightarrow \det \mathbf{A} = 0. \tag{319}$$

Nechť *i*-tý řádek je nyní *m*-násobkem *k*-tého řádku. Celou proceduru zopakujeme se stejným výsledkem, jako v předešlém kroku. Takto můžeme postupovat, dokud nevyčerpáme všechny řádky determinantu.
V případě sloupců bychom postupovali zcela analogicky.

Sedmá věta determinantu

Nechť $\mathbf{A}(n \times n)$ je horní trojúhelníková matice. Potom platí rovnost

$$\det\mathbf{A} = \mathrm{Tr}\mathbf{A}. \tag{320}$$

Důkaz

Determinat rozvineme podle prvků prvního sloupce, čímž získáme determinat (*n* – 1)-ho stupně, který opět rozvineme podle prvků prvního sloupce, čímž obdržíme determinant (*n* – 2)-ho stupně, atd.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \ldots = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \tag{321}$$

Osmá věta determinantu

Matice **A** má hodnost *h* právě tehdy, jestliže alespoň jeden její subdeterminant *h*-tého stupně je různý od nuly a každý její subdeterminant stupně vyššího je nulový.

Důkaz

Mějme čtvercovou matici **A**, na kterou jsme již aplikovali přímý chod GEM:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n-2)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (322)$$

kde $\forall a_{ij} \neq 0$.

Tato matice má zřejmě hodnost $h = n - 2$. Spočteme její subdeterminanty až do (*n* – 2)-ho stupně, a to rozvojem dle posledního, tj. *n*-tého řádku matice **A**, až do konce. Tím obdržíme posloupnost determinantů, které jsou těmi největšími subdeterminanty matice **A**.

$$\det\mathbf{A}=0\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n-2)(n-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot 0\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-2)} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n-2)(n-2)} \end{vmatrix}. \qquad (323)$$

Poslední determinant je již subdeterminantem matice **A** stupně n – 2. Dokazovanou větu již snadno rozšíříme na libovolnou matici stupně $n \times n$.

Devátá věta determinantu

$$h(\mathbf{A}) = h\left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right). \qquad (324)$$

Důkaz

Podle první věty determinantu je $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$. Podle osmé věty determinantu se proto musí rovnat i hodnosti obou dvou matic.

Definice adjungované matice

Nechť je dána čtvercová matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (325)$$

Označme A_{ij}^{*} algebraický doplněk prvku a_{ij}. Potom matici

$$\mathbf{A}^{*} = \begin{pmatrix} A_{11}^{*} & A_{21}^{*} & \cdots & A_{n1}^{*} \\ A_{12}^{*} & A_{22}^{*} & \cdots & A_{n2}^{*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}^{*} & A_{2n}^{*} & \cdots & A_{nn}^{*} \end{pmatrix} \qquad (326)$$

nazýváme **Adjungovanou maticí** k matici **A.**

Desátá věta determinantu

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{E}\det\mathbf{A} \tag{327}$$

Důkaz

Označme

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = c_{ij}\,. \tag{328}$$

Spočteme c_{ii}:

$$c_{ii} = a_{i1}A_{i1}^* + a_{i2}A_{i2}^* + \cdots + a_{in}A_{in}^* = \det\mathbf{A}\,. \tag{329}$$

Nyní spočteme c_{ij}, $i \neq j$:

$$c_{ii} = a_{i1}A_{j1}^* + a_{i2}A_{j2}^* + \cdots + a_{in}A_{jn}^*\,. \tag{330}$$

To je však rozvoj podle prvků j-tého řádku determinantu matice $\mathbf{A}'$, pro níž platí

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11}^{11} & a_{12}^{12} & \cdots & a_{1n}^{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}^{i1} & a_{i2}^{i2} & \cdots & a_{in}^{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}^{j1} & a_{i2}^{j2} & \cdots & a_{in}^{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{n1} & a_{n2}^{n2} & \cdots & a_{nn}^{nn} \end{pmatrix}, \tag{331}$$

kde horní index odpovídá poloze prvku v matici $\mathbf{A}'$, dolní index pak poloze téhož prvku v matici $\mathbf{A}$.
Podle třetí věty determinantu je

$$\det \mathbf{A}' = c_{ij} = 0. \tag{332}$$

***Pozorování*:**

$$\mathbf{A} = \frac{\det \mathbf{A}}{\mathbf{A}^*} \tag{333}$$

neboli

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^*}{\det \mathbf{A}}. \tag{334}$$

***Důsledek*:**

Ke čtvercové matici **A** existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ právě tehdy, pokud **A** je regulární, neboli když

$$\det \mathbf{A} \neq 0. \tag{335}$$

V tom případě je inverzní matice určena jednoznačně.

Cramerova věta

Nechť je dána soustava *n* rovnic o *n* neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{336}$$

Nechť matice této soustavy je regulární. Potom tato soustava má právě jedno řešení

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : x_i = \frac{\det \mathbf{B}_i}{\det \mathbf{A}}, \tag{337}$$

kde

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1^i & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \cdots & b_2^i & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n^i & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (338)$$

přičemž horní index označuje pořadí sloupce matice **A**, který nahrazujeme vektorem pravých stran soustavy (336).

Důkaz

Protože dle předpokladu věty je $\det \mathbf{A} \neq 0$, existuje $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{\mathbf{A}^*}{\det \mathbf{A}}$.
Násobením rovnice

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad (339)$$

inverzní maticí dostaneme

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{Ex} = \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{A}^*}{\det \mathbf{A}}\mathbf{b}, \qquad (340)$$

neboli

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & \cdots & A_{n1}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & \cdots & A_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}^* & A_{2n}^* & \cdots & A_{nn}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}, \qquad (341)$$

kde zřejmě

$$A_i = A_{1i}^* b_1 + A_{2i}^* b_2 + \cdots + A_{ni}^* b_n = \det \mathbf{B}_i. \qquad (342)$$

Gabriel Cramer (1704 – 1752)

***Pozorování*:**

U homogenní soustavy mají všechny matice $\mathbf{B}_i$ v *i*-tém sloupci nulový vektor a proto je jejich determinant $A_i = 0$, odkud plyne

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : x_i = 0 . \qquad (343)$$

***Příklad 1*:**

Vypočtěme determinant **Vandermondovy matice** *n*-tého stupně

$$\mathbf{V}_n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} . \qquad (344)$$

***Řešení*:**

$$\det \mathbf{V}_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & x_1(x_1 - x_n) & \cdots & x_1^{n-2}(x_1 - x_n) \\ 1 & x_2 - x_n & x_2(x_2 - x_n) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1}(x_1 - x_n)(x_2 - x_n)\cdot\cdots\cdot(x_{n-1} - x_n) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1}(-1)^{n-1}(x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdot\cdots\cdot(x_n - x_{n-1})V_{n-1} =$$

$$= (x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdot\cdots\cdot(x_n - x_{n-1})V_{n-1} =$$

$$= (x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdot\cdots\cdot(x_n - x_{n-1})(x_{n-1} - x_1)\cdot\cdots\cdot(x_{n-1} - x_{n-2})V_{n-2} =$$

$$= (x_n - x_1)\cdot\cdots\cdot(x_i - x_j)\cdot\cdots\cdot(x_2 - x_1) = \prod_{i>j=1}^{i=n}(x_i - x_j). \tag{345}$$

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735 – 1796)

***Příklad 2*:**

Řešme determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{pmatrix} \tag{346}$$

***Řešení*:**

Provedeme rozvoj determinantu podle prvního řádku. Obdržíme rekurentní výraz

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A}_n &= (\alpha+\beta)(-1)^2 \det \mathbf{A}_{n-1} + \\ &+ \alpha\beta(-1)^3 \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \\ &= (\alpha+\beta)(-1)^2 \det \mathbf{A}_{n-1} + (-1)^3 \alpha\beta(-1)^2 \det \mathbf{A}_{n-2} = \\ &= (\alpha+\beta)\det \mathbf{A}_{n-1} - \alpha\beta \det \mathbf{A}_{n-2}. \end{aligned} \tag{347}$$

Vypočteme

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{A}_2 &= (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2, \\
\det \mathbf{A}_3 &= (\alpha+\beta)^3 - 2(\alpha+\beta)\alpha\beta = \alpha^3 + \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + \beta^3, \\
\det \mathbf{A}_4 &= (\alpha+\beta)\left(\alpha^3 + \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + \beta^3\right) - \alpha\beta\left(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2\right) = \\
&= \alpha^4 + \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + \beta^3\alpha + \beta^4, \\
\det \mathbf{A}_5 &= (\alpha+\beta)\left(\alpha^4 + \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + \beta^3\alpha + \beta^4\right) - \\
&\quad - \alpha\beta\left(\alpha^3 + \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + \beta^3\right) = \\
&= \alpha^5 + \alpha^4\beta + \alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 + \beta^4\alpha + \beta^5, \\
&\ \vdots \\
\det \mathbf{A}_n &= \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k}\beta^k .
\end{aligned}
\tag{348}
$$

To je však geometrická řada. Pro její kvocient obecně platí

$$
q^{m-1} = \frac{a_m}{a_1}. \tag{349}
$$

Zvolíme-li např. $m = 2$, neboli $k = 1$ máme

$$
q = \frac{\alpha^{n-1}\beta}{\alpha^n} = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{350}
$$

Dále, součet prvních n členů geometrické posloupnosti je obecně řadou

$$
a_1 \sum_{i=0}^{n-1} q^i . \tag{351}
$$

Vynásobíme-li tento výraz kvocientem a vydělíme prvním členem řady a_1, postupně dostaneme

$$q\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \sum_{i=1}^{n} q^i = \left(q^n - 1\right) + \sum_{i=0}^{n-1} q^i \,, \qquad (352)$$

odkud po jednoduché úpravě plyne

$$q\sum_{i=0}^{n-1} q^i - \sum_{i=0}^{n-1} q^i = q^n - 1, \qquad (353)$$

neboli

$$\left(q-1\right)\sum_{i=0}^{n-1} q^i = q^n - 1, \qquad (354)$$

takže

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{q^n - 1}{q-1}. \qquad (355)$$

Pro hledaný součet prvních *n* členů geometrické posloupnosti odtud dostáváme výraz

$$a_1 \sum_{i=0}^{n-1} q^i = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1} \qquad (356)$$

Pro náš konkrétní případ řady (348) s kvocientem (351) a prvním členem $a_1 = \alpha^n$ odtud dostáváme

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha^{m-k} \beta^k = a_1 \frac{q^m - 1}{q-1} = \alpha^n \frac{\dfrac{\beta^m}{\alpha^m} - 1}{\dfrac{\beta}{\alpha} - 1}. \qquad (357)$$

Protože jednotlivé členy řady počítáme od nuly, zatímco kvocient roste od indexu 1, musí platit $m = n+1$. Dostáváme tak konečný výsledek

$$\det \mathbf{A}_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} \beta^k = \alpha^{n+1} \frac{\frac{\beta^{n+1}}{\alpha^{n+1}} - 1}{\frac{\beta}{\alpha} - 1} = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}. \qquad (358)$$

***Příklad 3*:**

Řešme determinant matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\varphi & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\varphi & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\varphi \end{pmatrix}. \qquad (359)$$

***Řešení*:**

Při řešení vužijeme naší znalosti řešení předešlého příkladu, který je formálně podobný. Užijeme tedy substituce

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &\equiv 2\cos\varphi, \\ \alpha\beta &\equiv 1. \end{aligned} \qquad (360)$$

Odtud

$$\begin{aligned} &\alpha = \frac{1}{\beta}, \\ &\beta^{-1} + \beta = 2\cos\varphi = \cos\varphi + i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}. \end{aligned} \qquad (361)$$

Dostáváme tak komplexní vyjádření obou koeficientů:

$$\beta = e^{-i\varphi},$$
$$\alpha = \frac{1}{\beta} = e^{i\varphi}. \tag{362}$$

My ale víme, že

$$\det \mathbf{B}_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \frac{e^{i\varphi(n+1)} - e^{-i\varphi(n+1)}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}, \tag{363}$$

což rozepsáno do goniometrického tvaru dává

$$\det \mathbf{B}_n =$$
$$= \frac{\left[\cos(\varphi(n+1)) + i\sin(\varphi(n+1))\right] - \left[\cos(\varphi(n+1)) - i\sin(\varphi(n+1))\right]}{(\cos\varphi + i\sin\varphi) - (\cos\varphi - i\sin\varphi)} =$$
$$= \frac{\cos(\varphi(n+1)) + i\sin(\varphi(n+1)) - \cos(\varphi(n+1)) + i\sin(\varphi(n+1))}{\cos\varphi + i\sin\varphi - \cos\varphi + i\sin\varphi} =$$
$$= \frac{2i\sin(\varphi(n+1))}{2i\sin\varphi} = \frac{\sin(\varphi(n+1))}{\sin\varphi}. \tag{364}$$

***Příklad 4*:**

Řešme soustavy

$$a)\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$
$$b)\ \mathbf{A}x = \mathbf{b}, \tag{365}$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 0 & \gamma & \beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{366}$$

***Řešení*:**

a) K řešení využijeme Cramerovu větu:

$$A_0 = \begin{vmatrix} \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 0 & \gamma & \beta \end{vmatrix} = -2\alpha\beta\gamma,$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} \gamma & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \\ \gamma & \gamma & \beta \end{vmatrix} = -\gamma^2\alpha - \beta^2\alpha + \alpha^2\gamma,$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} \beta & \gamma & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \\ 0 & \gamma & \beta \end{vmatrix} = \beta^3 - \alpha\beta\gamma - \gamma^2\beta,$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} \beta & \alpha & \gamma \\ \gamma & 0 & \beta \\ 0 & \gamma & \gamma \end{vmatrix} = -\beta^2\gamma + \gamma^3 - \gamma^2\alpha. \qquad (367)$$

Odtud plyne výsledek:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{A_1}{A_0} \\ \frac{A_2}{A_0} \\ \frac{A_3}{A_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{2\beta} + \frac{\beta}{2\gamma} - \frac{\alpha}{2\beta} \\ \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2\alpha} - \frac{\beta^2}{2\alpha\gamma} \\ \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\gamma^2}{2\alpha\beta} + \frac{\gamma}{2\beta} \end{pmatrix}. \qquad (368)$$

b) Problém vede na soustavu

$$\begin{aligned} x\beta + x\alpha &= \gamma \\ x\gamma + x\alpha &= \beta \\ x\gamma + x\beta &= \gamma \end{aligned} \qquad (369)$$

Z první a poslední rovnice plyne, že $\alpha = \gamma$, čili

$$\begin{aligned} x\beta + x\gamma &= \gamma \\ 2x\gamma &= \beta \end{aligned} \qquad (370)$$

Odtud

$$2\gamma x^2 + \gamma x - \gamma = 0, \qquad (371)$$

Což je kvadratická rovnice s kořeny

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}, \\ x_2 &= -1. \end{aligned} \qquad (372)$$

***Příklad 5*:**

Vypočtěme

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}), \qquad (373)$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$ a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}. \qquad (374)$$

***Řešení*:**

Na tomto příkladu demonstrujeme tzv. pivotní metodu výpočtu determinantu, kterou nebudeme formálně odvozovat. Libovolný nenulový prvek matice **A** si zvolíme za tzv. **pivot**. Nechť je tedy pivotem např. prvek a_{11}. Potom obecně platí

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{a_{11}^{1+1}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}. \qquad (375)$$

V našem případě tedy

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{4^2} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 9 & -8 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 18 & 4 & -14 \\ -7 & 2 & 7 \\ 9 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 1. \qquad (376)$$

To je však dle sedmé věty determinantu ekvivalentní determinantu (a tedy převeditelné na determinant) libovolné horní trojúhelníkové matice tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (377)$$

Stačí tedy vypočíst

$$\det\left[\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_3\\ 0 & 1 & x_4 & x_5\\ 0 & 0 & 1 & x_6\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\right]=\begin{vmatrix}1-\lambda & x_1 & x_2 & x_3\\ 0 & 1-\lambda & x_4 & x_5\\ 0 & 0 & 1-\lambda & x_6\\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=$$
$$=(1-\lambda)^4. \qquad (378)$$

Součin determinantů

První věta o součinu determinantů

Buďte **A**, **B** čtvercové matice a nechť

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{M}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}\end{pmatrix}, \qquad (379)$$

resp.

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{M} & \mathbf{B}\end{pmatrix}, \qquad (380)$$

kde **M** je libovolná matice typu $n\times m$. Potom

$$\det\mathbf{C}=\det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}. \qquad (381)$$

Důkaz

Důkaz provedeme např. pro první případ. Matici **C** upravíme na trojúhelníkový tvar tak, že nejprve upravíme řádky z horní poloviny, aniž bychom užívali dalších a potom upravíme zbývající bez užívání předchozích. Dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1m} & m'_{11} & m'_{12} & \cdots & m'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2m} & m'_{21} & m'_{22} & \cdots & m'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{mm} & m'_{m1} & m'_{m2} & \cdots & m'_{mn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_{11} & b'_{12} & \cdots & b'_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b'_{22} & \cdots & b'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & b'_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (382)$$

Dle osmé věty determinantu to pak znamená, že

$$\det \mathbf{C} = a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot \dots \cdot a'_{mm} \cdot b'_{11} \cdot b'_{22} \cdot \dots \cdot b'_{nn} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}. \qquad (383)$$

Druhá věta o součinu determinantů

Nechť **A**, **B** jsou matice typu $n \times n$. Potom

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = \det(\mathbf{BA}). \qquad (384)$$

Důkaz

Vyjdeme z matice

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix}. \qquad (385)$$

K *i*-tému sloupci přičteme postupně a_{1i}-násobek (n + 1)-ho sloupce, a_{2i}-násobek (n + 2)-ho sloupce, atd., až a_{ni}-násobek posledního sloupce. Totéž provedeme se všemi sloupci až do *n*-tého. Obdržíme tak matici

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{BA} & \mathbf{B} \end{pmatrix}. \qquad (386)$$

Nyní mezi sebou vyměníme vždy i-tý a (n + i)-tý sloupec. Protože při každé takové výměně změní determinant znaménko, vynásobíme vždy ještě nově vzniklý i-tý řádek číslem -1. Obdržíme tak matici

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{BA} \end{pmatrix}. \tag{387}$$

Jelikož všechny úpravy, které jsme až dosud provedli, zachovávají hodnotu determinantu, je

$$\det \mathbf{C} = \det \mathbf{D}. \tag{388}$$

Podle předchozí věty pak platí

$$\det \mathbf{C} = \det(\mathbf{BA}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}. \tag{389}$$

Zbývá ještě dokázat rovnost

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}). \tag{390}$$

To je však snadné, neboť stačí, když v matici **C** vzájemně vyměníme submatice **A**, **B** a zopakujeme znovu celý výpočet.

Elementární úvod do tenzorové algebry

Einsteinova sumační konvence

V tenzorové algebře se velmi často setkáváme s lineárními transformacemi typu

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j , \tag{391}$$

kde se sčítací index j vyskytuje právě dvakrát. Pro zjednodušení tohoto zápisu zavedl Albert Einstein novou konvenci, podle níž

vyskytne-li se ve výrazu nějaký index právě dvakrát, rozumíme tím automaticky sumaci přes tento index, aniž bychom vypisovali sumační znak (horní sumační mez *n*, neboli dimenze prostoru v němž operujeme, zpravidla vyplývá z kontextu úlohy, při dokazování obecných matematických vět bývá dokonce irelevantní).

Např. výraz (391) tak podle Einsteinovy sumační konvence zapíšeme jako

$$x_i' = a_{ij} x_j \,. \qquad (392)$$

Albert Einstein (1879 – 1955)

Definice tenzorového součinu vektorů

Tenzorovým součinem

$$T_{ij} \equiv u_i v_j \qquad (393)$$

dvou vektorů u_i, v_j budeme rozumět předpis, který *i*-tou komponentu vektoru **u** a *j*-tou komponentu vektoru **v** zobrazí na *ij*-tý prvek tenzoru **T**. jedná se tedy o prosté maticové násobení

$$
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \cdots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \cdots & u_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n v_1 & u_n v_2 & \cdots & u_n v_n \end{pmatrix} \equiv T_{ij} . \qquad (394)
$$

Kroneckerův tenzor

Kroneckerův tenzor δ je tenzor druhého řádu, který je v tenzorové algebře reprezentován jednotkovou maticí. Má tedy následující vlastnosti:

$$
\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases} \qquad (395)
$$

Tento tenzor funguje jako filtr, který propouští pouze identické dvojice $i = j$.
Budeme se zabývat pouze takovými transformacemi, které zachovávají velikosti vektorů, tj. rovněž kvadráty

$$
x_i x_i = a_{ij} a_{ik} x_j x_k = x_j x_j = \delta_{jk} x_j x_k . \qquad (396)
$$

Odtud máme rovnici

$$
\left(a_{ij} a_{ik} - \delta_{jk} \right) x_j x_k = 0 . \qquad (397)
$$

Tato podmínka musí platit při libovolných $x_j x_k$, což znamená, že

$$
x_j x_k \neq 0 \qquad (398)
$$

a tedy

$$
a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} . \qquad (399)
$$

Leopold Kronecker (1823 – 1891)

Transformační vlastnosti tenzorů

Tenzorem druhého řádu nazýváme soubor veličin T_{ij}, které se při transformaci souřadnic

$$x'_i = a_{ik} x_k \qquad (400)$$

transformují podle zákona (sčítáno přes *k*, *l*)

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl} . \qquad (401)$$

Důkaz

V transformované soustavě bude

$$T'_{ij} \equiv u'_i v'_j . \qquad (402)$$

Transformační zákon nalezneme tak, že u_i, v_j vyjádříme podle transformačního zákona pro vektory (400). Ve shodě s tím položíme

$$\begin{aligned} u'_i &= a_{ik} u_k , \\ v'_j &= a_{jl} v_l , \end{aligned} \qquad (403)$$

což vede ke vztahu

$$T'_{ij} \equiv u'_i v'_j = a_{ik} a_{jl} u_k v_l \equiv a_{ik} a_{jl} T_{kl} \,. \qquad (404)$$

***Zobecnění*:**

Tenzory vyšších řádů se definují obdobně. Např. tenzorem třetího řádu nazýváme soubor veličin T_{lmn}, které se při transformacích souřadnic (400) transformují podle zákona (sčítáno přes *l*, *m*, *n*)

$$T'_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} T_{lmn} \,. \qquad (405)$$

Skaláry neobsahují žádný charakteristický index, komponenty vektorů charakterizujeme jedním indexem udávajícím souřadné osy, k nimž se tyto komponenty vztahují.
To nám dovoluje interpretovat skaláry jako tenzory nultého řádu, vektory jako tenzory prvního řádu, uspořádané systémy vektorů (např. matice) jako tenzory druhého řádu, atd.
Z definice plyne, že pro skaláry, vektory i tenzory vyšších řádů platí zákon asociativní a distributivní.

Definice symetrického tenzoru

Tenzory se mohou vyznačovat jistými vlastnostmi symetrie vůči záměně indexů. Je-li

$$T_{ij} = T_{ji} \,, \quad (i = 1, 2, 3) \,, \qquad (406)$$

hovoříme o tzv. symetrickém tenzoru.

Definice antisymetrického tenzoru

Tenzor vyhovující relacím

$$T_{ij} = -T_{ji} \,, \quad (i = 1, 2, 3) \qquad (407)$$

nazýváme antisymetrickým tenzorem.

Vlastnosti symetrie

Vlastnosti symetrie tenzoru nezávisí na volbě souřadného systému: má-li tenzor nějakou symetrii v jednom souřadném systému, zachovává si ji ve všech souřadných systémech.

Důkaz

Nechť $T_{ij} = T_{ji}$ je symetrický tenzor. Po transformaci (401) je

$$\begin{aligned} T'_{ij} &= a_{ik} a_{jl} T_{kl}, \\ T'_{ji} &= a_{jk} a_{il} T_{kl}. \end{aligned} \qquad (408)$$

V první rovnici zaměníme indexy $k \leftrightarrow l$ a užijeme vlastnost symetrie $T_{kl} = T_{lk}$, čímž dostáváme

$$T'_{ij} = a_{il} a_{jk} T_{lk} = a_{jk} a_{il} T_{kl} = T'_{ji}. \qquad (409)$$

Pro antisymetrický tenzor $T_{ij} = -T_{ji}$ a tenzory vyšších řádů je postup důkazu obdobný.

Tenzorový součin tenzorů

Součin komponent T_{ij} tenzoru druhého řádu a komponent u_k tenzoru prvního řádu (vektoru) tvoří tenzor 2 + 1 = 3-ho řádu

$$R_{ijk} \equiv T_{ij} u_k. \qquad (410)$$

Důkaz

Ve shodě s transformačními zákony je

$$\begin{aligned} T'_{ij} &= a_{il} a_{jm} T_{lm}, \\ u'_k &= a_{kn} u_n. \end{aligned} \qquad (411)$$

Odtud

$$R'_{ijk} \equiv T'_{ij}u'_k = a_{il}a_{jm}a_{kn}T_{lm}u_n = a_{il}a_{jm}a_{kn}R_{lmn}. \qquad (412)$$

***Zobecnění*:**

Nechť $R_{i_1 i_2 \ldots i_m}$, $T_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ jsou tenzory řádu *m* a *n*. Jejich tenzorový součin

$$R_{i_1 i_2 \ldots i_m j_1 j_2 \ldots j_n} \equiv R_{i_1 i_2 \ldots i_m} T_{j_1 j_2 \ldots j_n} \qquad (413)$$

je tenzorem řádu $m+n$.

Levi-Civitův tenzor

Dle definice (288) je Levi-Civitův permutační symbol antisymetrický vzhledem k permutaci libovolných dvou indexů. Takové struktury, jež jsou antisymetrické vzhledem k libovolné dvojici indexů nazýváme **úplně antisymetrickými**. Ve shodě s (405) položíme

$$e'_{ijk} = a_{il}a_{jm}a_{kn}e_{lmn}. \qquad (414)$$

Speciálně, vezmeme-li *i* = 1, *j* = 2, *k* = 3, pak je

$$e'_{123} = a_{1l}a_{2m}a_{3n}e_{lmn} = \det \mathbf{A}. \qquad (415)$$

Odtud plyne, že při rotacích

$$e'_{ijk} = e_{ijk} \qquad (416)$$

a při zrcadlení

$$e'_{ijk} = -e_{ijk}. \qquad (417)$$

Ukázali jsme tedy, že Levi-Civitův permutační symbol $e_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ je úplně antisymetrickým tenzorem n-tého řádu.

Definice kontrakce tenzoru

Součet přes každou dvojici stejných indexů v tenzoru $T_{ijk\ldots}$ nazýváme kontrakcí tenzoru přes tuto dvojici.

Kontrakce tenzoru

Kontrakce tenzoru n-tého řádu snižuje řád tohoto tenzoru o dva.

Důkaz

Položíme např. $k = j$ (a přes dva stejné indexy sčítáme)

$$Q'_{ijjl\ldots} = a_{il} a_{jm} a_{jn} a_{lo} \cdots Q_{lmno\ldots} = a_{il} \delta_{mn} a_{lo} \cdots Q_{lmno\ldots} = a_{il} a_{lo} \cdots Q_{lmmo\ldots} . \tag{418}$$

Příklad 1:

Uvažujme kontrakci tenzoru třetího řádu. Položme $k = j$. Položme

$$\begin{aligned} u_i &\equiv T_{lmm} , \\ u'_j &\equiv T'_{ijj} . \end{aligned} \tag{419}$$

Dostáváme

$$u'_i \equiv T'_{ijj} = a_{il} a_{jm} a_{jn} T_{lmn} = a_{il} \delta_{mn} T_{lmn} = a_{il} T_{lmm} = a_{il} u_l , \tag{420}$$

což je vskutku transformační rovnice vektoru – tenzoru prvního řádu.

***Příklad 2*:**

Kontrakce tenzoru druhého řádu T_{ij} zřejmě znamená součet diagonálních elementů:

$$T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} \equiv \mathrm{Tr}T_{ij} . \tag{421}$$

V transformované soustavě souřadné odpovídá této kontrakci

$$T'_{jj} \equiv T'_{11} + T'_{22} + T'_{33} \equiv \mathrm{Tr}T'_{ij} .$$

V transformačním zákoně (401) položíme $j = i$ čímž dostaneme

$$T'_{ii} = a_{ik} a_{il} T_{kl} = \delta_{ik} T_{kl} = T_{kk} . \tag{422}$$

Kontrakce tenzoru T_{ij} tedy vskutku nezávisí na volbě souřadné soustavy – je to invariant, čili skalár (tenzor nultého řádu).

***Pozorování*:**

Je-li $T_{ij} \equiv u_i v_j$, pak kontrakce T_{ij} neznamená nic jiného, než

$$\begin{aligned} \delta_{ij} T_{ij} &= \mathrm{Tr}T_{ij} = T_{ii} \equiv \left(u_1, u_2, \ldots, u_n\right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_i v_i = \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \end{aligned} \tag{423}$$

Tuto speciální transformaci nazýváme **skalární součin vektorů u** a **v**.

Je-li tenzor čtvrtého řádu O_{ijkl} tenzorovým součinem dvou tenzorů

$$O_{ijkl} = R_{ij} T_{kl} , \tag{424}$$

pak dvojnou kontrakcí $(k = i, l = j)$ získáme invariant

$$R'_{ij} T'_{ij} = R_{ij} T_{ij} . \qquad (425)$$

Ve speciálním případě $R_{ij} = T_{ij}$ odtud plyne

$$T'_{ij} T'_{ij} = T_{ij} T_{ij} , \qquad (426)$$

čili suma kvadrátů všech komponent tenzoru druhého řádu je opět skalárem. Z každého tenzoru druhého řádu lze tak vytvořit dva nezávislé invarianty tohoto tenzoru: **lineární invariant** T_{ii} a **kvadratický invariant** $T_{ij} T_{ij}$.
Podobně lze vytvářet další algebraické invarianty vyšších řádů, jako např. $T_{ij} T_{jk} T_{ki}$, $(T_{ij} T_{ij})^2$, ... Je zřejmé, že lineární algebraický invariant mají pouze tenzory sudého řádu, zatímco kvadratický invariant existuje u tenzorů libovolného řádu.

Diagonalizace tenzoru

Tenzor T_{ij} druhého řádu má (v trojrozměrném prostoru) obecně $3^2 = 9$ nezávislých komponent. Vhodnou transformací (401) lze anulovat všechny nediagonální elementy, tj.

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j : T'_{ij} = 0 , \qquad (427)$$

takže zbudou pouze diagonální komponenty T'_{ii}. Této proceduře se říká **diagonalizace tenzoru**, nebo též **redukce tenzoru k hlavním osám**.

***Příklad*:**

Budiž T_{ij} tenzorem druhého řádu a u_j vektorem. Pak transformace

$$v_i \equiv T_{ij} u_j \qquad (428)$$

je vektor. Zvolme tento vektor tak, aby byl paralelní, resp. antiparalelní s vektorem u_i, tj.

$$v_i = \lambda u_i . \tag{429}$$

Vektor u_i pak musí vyhovovat rovnicím

$$T_{ij} u_j = \lambda u_i \equiv \lambda \delta_{ij} u_j , \tag{430}$$

neboli

$$\left(T_{ij} - \lambda \delta_{ij} \right) u_j = 0 . \tag{431}$$

To je však soustava homogenních rovnic pro vektor u_j. Jak víme, má tato soustava řešení právě když determinant soustavy je roven nule, neboli

$$\det\left(T_{ij} - \lambda \delta_{ij} \right) = \begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 . \tag{432}$$

Tato podmínka představuje kubickou rovnici pro parametr λ. Tato rovnice má obecně tři různá řešení (tzv. **spektrum tenzoru** T_{ij}), která nazýváme **vlastními hodnotami tenzoru** T_{ij}. Jsou-li všechny nediagonální komponenty nulové, pak se (432) zjednoduší na tvar

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \left(T_{11} - \lambda \right)\left(T_{22} - \lambda \right)\left(T_{33} - \lambda \right) = 0 . \tag{433}$$

Řešení $\lambda_1 = T_{11}, \lambda_1 = T_{11}, \lambda_1 = T_{11}$ pak jednoduše souvisí pouze s diagonálními komponentami. Diagonalizaci tenzorových operátorů a výpočtu jejich spekter, se budeme věnovat ve třetím dílu této knihy.

Úvod do teorie Hilbertových prostorů

V kapitole o tenzorech jsme se již setkali se skalárním součinem vektorů. V této kapitole si rozebereme vlastnosti této operace podrobněji.

David Hilbert (1862 – 1943)

Definice skalárního součinu vektorů

Nechť V je vektorový prostor. Nechť je dáno zobrazení $H \times H \to \mathbb{C}$, které každé uspořádané dvojici vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ přiřazuje reálné číslo, které značíme $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ tak, že

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} :$$

$$\begin{aligned}
&[x+y, z] = [x, z] + [y, z] \\
&[x, y+z] = [x, z] + [x, y] \\
&[\alpha x, y] = \alpha [x, y] \\
&[x, \alpha y] = \bar{\alpha} [x, y] \\
&[x, y] = \overline{[y.x]} \\
&\forall x \neq 0 : [x, x] > 0 \\
&x = 0 > [x, x] = 0
\end{aligned} \tag{434}$$

potom uvedené zobrazení nazýváme skalárním součinem na prostoru H a tento prostor nazýváme Hilbertovým prostorem.

Definice normy vektoru

Nechť H je Hilbertův prostor a nechť $\mathbf{x} \in H$. Číslo

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{[\mathbf{x},\mathbf{x}]} \tag{435}$$

nazýváme normou (absolutní hodnotou, velikostí, délkou) vektoru **x**.

Cauchy – Schwarzova věta

Nechť H je Hilbertův prostor a nechť $\mathbf{x},\mathbf{y} \in H$. Potom platí

$$\left|[\mathbf{x},\mathbf{y}]\right| \le \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|. \tag{436}$$

Přičemž rovnost nastane právě tehdy, když vektory **x**, **y** jsou lineárně závislé.

***Důkaz*:**

a) nechť alespoň jeden z vektorů **y**, **y** je nulový. Dokazovaná nerovnost má pak tvar $0 \le 0$ což zřejmě platí. V tomto případě dokonce nastává rovnost, takže vektory **x**, **y** jsou lineárně závislé, a druhá část dokazovaného tvrzení tak rovněž platí.
b) Nechť **x**, **y** jsou nenulové vektory a λ je libovolné reálné číslo. Zřejmě můžeme pasát

$$[\mathbf{x}-\lambda\mathbf{y},\mathbf{x}-\lambda\mathbf{y}] \ge 0, \tag{437}$$

odkud

$$[\mathbf{y},\mathbf{y}]\lambda^2 - 2[\mathbf{x},\mathbf{y}]\lambda + [\mathbf{x},\mathbf{x}] \ge 0. \tag{438}$$

To je kvadratická nerovnice proměnné λ.
Kdyby byl její diskriminant $D > 0$, potom by nerovnost neplatila pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}$. Proto musí být nutně $D \le 0$, tj.

$$4[\mathbf{x},\mathbf{y}]^2 - 4[\mathbf{y},\mathbf{y}][\mathbf{x},\mathbf{x}] \le 0, \tag{439}$$

čili

$$[\mathbf{x},\mathbf{y}]^2 \le \|x\|^2 \cdot \|y\|^2, \tag{440}$$

což jsme chtěli dokázat. Rovnost v tomto případě nastává tehdy, je-li $D = 0$, to jest právě tehdy, jestliže

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \mathbf{x} - \lambda \mathbf{y} = 0, \tag{441}$$

tj.

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}. \tag{442}$$

Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) **Karl Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921)**

***Důsledek*:**

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in H \setminus \{\mathbf{0}\} : \frac{|[\mathbf{x},\mathbf{y}]|}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \le 1, \tag{443}$$

neboli

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in H \setminus \{\mathbf{0}\} : -1 \le \frac{|[\mathbf{x},\mathbf{y}]|}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \le 1. \tag{444}$$

Minkowského (trojúhelníková) nerovnost

Nechť H je Hilbertův prostor a nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$. Potom platí:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \tag{445}$$

Důkaz

Užitím Cauchy – Schwarzovy věty můžeme psát

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= [\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}] = [\mathbf{x}, \mathbf{x}+\mathbf{y}] + [\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}] = \\ &= [\mathbf{x},\mathbf{x}] + [\mathbf{x},\mathbf{y}] + [\mathbf{y},\mathbf{x}] + [\mathbf{y},\mathbf{y}] = \|\mathbf{x}\|^2 + 2[\mathbf{x},\mathbf{y}] + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\left|[\mathbf{x},\mathbf{y}]\right| \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = \left(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\right)^2,\end{aligned} \tag{446}$$

odkud již, odmocněním obou stran, plyne dokazované tvrzení.

Herman Minkowski (1864 – 1909)

Definice kanonického skalárního součinu vektorů

Nechť V_n je obecný vektorový prostor dimenze *n*, $B = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ nějaká jeho báze. Snadno nahlédneme, že předpisem

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,; \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \tag{447}$$

jsou definovány vektory $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V_n$, a předpisem

$$[\mathbf{x},\mathbf{y}]=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (448)$$

je na V_n definován skalární součin. Specielně, je-li B kanonická báze prostoru V_n, pak je předpisem (448) definován na V_n tzv. kanonický skalární součin.

***Poznámka*:**

Užitím Einsteinovy sumační konvence můžeme (448) přepsat do tvaru

$$[\mathbf{x},\mathbf{y}]=x_i y_i\,. \qquad (449)$$

Ortogonalita

Definice ortogonality vektorů

Dva vektory $\mathbf{u},\mathbf{v}\in H$ jsou na sebe kolmé (ortogonální) právě tehdy, když

$$[\mathbf{u},\mathbf{v}]=0\,. \qquad (450)$$

Tuto vlastnost zapisujeme $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$ či ekvivalentním zápisem $\mathbf{u}=\mathbf{v}^{\perp}$.

Odchylka dvou vektorů

Nechť V je vektorový prostor s kanonickým skalárním součinem a nechť $\mathbf{x},\mathbf{y}\in H\setminus\{\mathbf{0}\}$. Potom reálné číslo $\varphi\in\langle 0,\pi\rangle$, určené vztahem

$$\cos\varphi=\frac{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \qquad (451)$$

vyjadřuje odchylku vektorů **x**, **y** v prostoru *V* a je určeno jednoznačně.

Důkaz

Nechť $B = \left\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \right\rangle$ je kanonická báze prostoru *V*.
Nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, potom $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L\left\langle B \right\rangle$, tj. užitím Einsteinovy sumační konvence

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_i e_i, \\ \mathbf{y} &= y_j e_j. \end{aligned} \tag{452}$$

Odtud

$$\left[\mathbf{x}, \mathbf{y}\right] = x_i y_j \left[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\right]. \tag{453}$$

S ohledem na ortogonalitu vektorů kanonické báze musí platit

$$\left[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\right] = \left\|\mathbf{e}_i\right\| \cdot \left\|\mathbf{e}_j\right\| \cdot \cos\varphi_{ij} = \delta_{ij}, \tag{454}$$

kde φ_{ij} značí úhel mezi vektory $\mathbf{e}_i$ a $\mathbf{e}_j$, jehož kosinus dle důsledku Cauchy – Schwarzovy věty vskutku existje. Platí tedy

$$\left[\mathbf{x}, \mathbf{y}\right] = x_i y_k \left[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\right] = x_i y_j \delta_{ij} = x_i y_i = x_i y_j \left\|\mathbf{e}_i\right\| \left\|\mathbf{e}_j\right\| \cos\varphi_{ij} = \left\|\mathbf{x}\right\| \left\|\mathbf{y}\right\| \cos\varphi \tag{455}$$

ve shodě s definicí kanonického skalárního součinu.

Kosinová věta

Nechť *H* je Hilbertův prostor, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$. Potom platí

$$\left\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\right\|^2 = \left\|\mathbf{x}\right\|^2 + \left\|\mathbf{y}\right\|^2 - 2\left\|\mathbf{x}\right\| \left\|\mathbf{y}\right\| \cos\varphi, \tag{456}$$

kde φ je odchylka vektorů **x**, **y**.

Důkaz

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 &= [\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{x}-\mathbf{y}] = [\mathbf{x},\mathbf{x}-\mathbf{y}] - [\mathbf{y},\mathbf{x}-\mathbf{y}] = \\ &= [\mathbf{x},\mathbf{x}] - [\mathbf{x},\mathbf{y}] - [\mathbf{y},\mathbf{x}] + [\mathbf{y},\mathbf{y}] = \|\mathbf{x}\|^2 - 2[\mathbf{x},\mathbf{y}] + \|\mathbf{y}\|^2 .\end{aligned} \quad (457)$$

Z věty o odchylce vektorů pak pak plyne dokazované tvrzení.

Zobecnění - ortogonalita vektorů

Vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ z Hilbertova prostoru H jsou vzájemně ortogonální, jestliže platí

$$\left[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\right] = \delta_{ij} \|\mathbf{v}_i\| \|\mathbf{v}_j\| . \quad (458)$$

Pythagorova věta

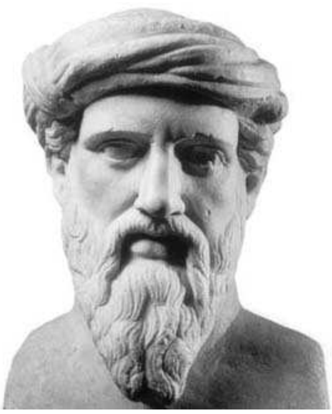
Nechť H je Hilbertův prostor, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$. Potom platí

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 . \quad (459)$$

Důkaz

Uvážíme-li, že

$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow [\mathbf{x}, \mathbf{y}] = 0$, plyne důkaz okamžitě z kosinové věty.



Pythagoras ze Samu (570 – 490 př. n. l)

Ortogonalita a nezávislost

Nechť skupina vektorů $B = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ je ortogonální skupinou v Hilbertově prostoru *H*. Potom *B* je lineárně nezávislá.

Důkaz

Nechť *B* je ortogonální skupina. Řešme vektorovou rovnici

$$b_1\mathbf{u}_1 + \cdots + b_k\mathbf{u}_k = 0 \tag{460}$$

s neznámými b_j. Vynásobme skalárně obě strany rovnice libovolným vektorem $\mathbf{u}_i \in B$. Dostaneme

$$0 + \cdots + 0 + b_i\left[\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i\right] + 0 + \cdots + 0 = 0. \tag{461}$$

Protože dle věty o odchylce vektorů je $\left[\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i\right] \neq 0$, dostáváme výsledek $b_1 = 0$. Zapůsobíme-li podobným způsobem na rovnici (460) postupně všemi zbylými vektory skupiny *B*, dopočteme obdobným způsobem jednoznačně i ostatní koeficienty. Dospíváme tak k závěru, že

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0. \tag{462}$$

To je ovšem dle kritéria lineární závislosti vektorů důkazem toho, že *B* je vskutku lineárně nezávislá skupina.

Gram – Schmidtova věta o ortogonalizaci

Nechť $\mathbf{v}_i$ jsou prvky Hilbertova prostoru *H*. Potom

$$\begin{aligned} \exists \mathbf{w}_m; \forall m = 1, \dots, n: &\text{a) } \mathbf{w}_j \perp \mathbf{w}_k \Leftrightarrow \left[\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k\right] = 0 \Leftrightarrow j \neq k \\ &\text{b) } L\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \rangle = L\langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \rangle. \end{aligned} \tag{463}$$

Důkaz

Podmínka a) okamžitě plyne z věty o odchylce vektorů a jejích důsledků.
Podmínka b) bude splněna, pakliže

$$\mathbf{w}_m = \mathbf{v}_m - \sum_{k-1}^{m-1} \mathbf{w}_k \lambda_m^k , \tag{464}$$

neboli

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{w}_m + \sum_{k-1}^{m-1} \mathbf{w}_k \lambda_m^k . \tag{465}$$

Je zřejmé, že

$$L\left\langle \mathbf{v}_1, \dots , \mathbf{v}_m \right\rangle = L\left\langle \mathbf{w}_1, \dots , \mathbf{w}_{m-1}, \dots , \mathbf{v}_m \right\rangle . \tag{466}$$

Podle indukčního předpokladu a díky volbě $\mathbf{w}_m$ také

$$L\left\langle \mathbf{w}_1, \dots , \mathbf{w}_m \right\rangle = L\left\langle \mathbf{w}_1, \dots , \mathbf{w}_{m-1}, \dots , \mathbf{v}_m \right\rangle . \tag{467}$$

Podmínka a) vyžaduje, aby

$$\forall i = 1, \dots , m-1 : \mathbf{w}_i \perp \mathbf{w}_m \Leftrightarrow \left[\mathbf{w}_i , \mathbf{v}_m - \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{w}_k \lambda_m^k \right] = 0 , \tag{468}$$

odkud

$$\left[\mathbf{w}_i , \mathbf{v}_m \right] = \lambda_m^i \left[\mathbf{w}_i , \mathbf{w}_i \right], \tag{469}$$

což jednoznačně určuje λ_m^i.

Jørgen Pedersen Gram (1850 – 1916)

Erhard Schmidt (1876 – 1959)

Definice ortogonálního doplňku

Nechť W je podprostor Hilbertova prostoru H. Množinu

$$W^{\perp} = \left\{ \mathbf{x}_i \in H : \mathbf{x}_i \perp W \right\} \qquad (470)$$

nanazýváme ortogonálním doplňkem podprostoru W.

První věta ortogonálního doplňku

$$W \subset H \Leftrightarrow W^{\perp} \subset H \qquad (471)$$

Důkaz

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W^{\perp} \Rightarrow \mathbf{u} \perp W, \mathbf{v} \perp W \Rightarrow \forall \mathbf{w} \in W : \mathbf{u} \perp \mathbf{v}, \mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall \mathbf{w} \in W : \left(\mathbf{u} + \mathbf{v}\right) \perp \mathbf{w} \Rightarrow \left(\mathbf{u} + \mathbf{v}\right) \perp W \Rightarrow \left(\mathbf{u} + \mathbf{v}\right) \in W^{\perp}.$$
$$\alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in W^{\perp} \Rightarrow \forall \mathbf{w} \in W : \mathbf{u} \perp \mathbf{w} \Rightarrow \forall \mathbf{w} \in W : \left(\alpha \mathbf{u}\right) \perp \mathbf{w} \Rightarrow \left(\alpha \mathbf{u}\right) \in W^{\perp}.$$
$$(472)$$

Druhá věta ortogonálního doplňku

Nechť H je netriviální Hilbertův prostor konečné dimenze n. Nechť dále $W \subset H$. Potom platí:

a) $V = W \cup W^{\perp}$ $\qquad (473)$
b) $W^{\perp\perp} = W$ $\qquad (474)$

Důkaz

Nechť $W = \{\mathbf{0}\}$. Potom

$$W^{\perp} = V, W^{\perp\perp} = V^{\perp} = \{\mathbf{0}\} = W \,. \qquad (475)$$

Obě dokazovaná tvrzení tedy v tomto případě platí.
Nechť $1 \leq \dim W \equiv m \leq n$. Sestrojme kanonickou bázi $\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \rangle$ prostoru *W* a doplňme ji na kanonickou bázi $\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ prostoru *V*. Je zřejmé, že $\langle \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ je báze prostoru $W^{\perp}$, neboli

$$L\langle \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle \perp L\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \rangle \,. \qquad (476)$$

Platí tedy

$$\dim W + \dim W^{\perp} = m + (n - m) = n \,. \qquad (477)$$

Podle druhé věty dimenze podprostoru tedy vskutku platí

$$V = W \cup W^{\perp}. \qquad (478)$$

Jelikož zřejmě $W \subseteq W^{\perp}$, stačí tedy už jen ukázat, že $\dim W = \dim W^{\perp\perp}$. To je však snadné, neboť stačí v (477) pouze nahradit

$$\begin{aligned} &W \to W^{\perp}, \\ &W^{\perp} \to W^{\perp\perp}. \end{aligned} \qquad (479)$$

Dostáváme

$$\dim W^{\perp\perp} = n - \dim W^{\perp} = n - (n - m) = m = \dim W \,. \qquad (480)$$

Třetí věta ortogonálního doplňku

Nechť H je Hilbertův prostor konečné dimenze. Potom pro jeho podprostory W_1, W_2 platí

$$\begin{aligned} \left(W_1 \cap W_2\right)^2 &= W_1^{\perp} \cup W_2^{\perp}, \\ \left(W_1 \cup W_2\right)^2 &= W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}. \end{aligned} \tag{481}$$

Důkaz

Zřejmě

$$W_i^{\perp} \subseteq \left(W_1 \cap W_2\right)^{\perp} \tag{482}$$

a tedy

$$W_1^{\perp} \cup W_2^{\perp} \subseteq \left(W_1 \cap W_2\right)^{\perp}. \tag{483}$$

Podobně rovněž

$$W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp} \supseteq \left(W_1 \cup W_2\right)^{\perp}. \tag{484}$$

Dále

$$\begin{aligned} \left(W_1 \cap W_2\right)^{\perp} &= \left[\left(W_1^{\perp}\right)^{\perp} \cap \left(W_2^{\perp}\right)^{\perp}\right]^{\perp} \subseteq \left[\left(W_1^{\perp} \cup W_2^{\perp}\right)^{\perp}\right]^{\perp} = W_1^{\perp} \cup W_2^{\perp}, \\ \left(W_1 \cup W_2\right)^{\perp} &= \left[\left(W_1^{\perp}\right)^{\perp} \cup \left(W_2^{\perp}\right)^{\perp}\right]^{\perp} \subseteq \left[\left(W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}\right)^{\perp}\right]^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}. \end{aligned} \tag{485}$$

Ortonormalita

Definice ortonormální matice

Nechť $A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení, **A** jeho matice, a nechť na $\mathbb{R}^n$ je definován kanonický skalární součin. Jestliže

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : [\mathbf{x},\mathbf{y}] = [\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{y}] \tag{486}$$

(zachování skalárního součinu), potom *A* nazýváme ortonormálním operátorem v $\mathbb{R}^n$ a **A** ortonormální maticí.

První věta ortonormality

Lineární operátor $A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je ortonormální právě tehdy, zachovává-li normu každého vektoru z $\mathbb{R}^n$ a odchylku každých dvou nenulových vektorů $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz

$\Leftarrow)$ Nechť **A** je ortonormální a nechť $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x},\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Označme φ, resp. φ' odchylku vektorů $\mathbf{x},\mathbf{y}$ resp. $\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{y}$. Chceme dokázat, že

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| &= \|\mathbf{x}\|, \\ \cos\varphi' &= \cos\varphi. \end{aligned} \tag{487}$$

To je však snadné:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| &= \sqrt{[\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{x}]} = \sqrt{[\mathbf{x},\mathbf{x}]} = \|\mathbf{x}\|, \\ \cos\varphi' &= \frac{[\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{y}]}{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|\|\mathbf{A}\mathbf{y}\|} = \frac{[\mathbf{x},\mathbf{x}]}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} = \cos\varphi. \end{aligned} \tag{488}$$

$\Rightarrow)$ Nechť operátor **A** zachovává normu každého vektoru a úhel každých dvou nenulových vektorů. Nechť $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$. V případě, že

$$\mathbf{x}=\mathbf{0}\vee\mathbf{y}=\mathbf{0}\Rightarrow[\mathbf{x},\mathbf{y}]=[\mathbf{Ax},\mathbf{Ay}]. \tag{489}$$

Nechť $\mathbf{x}=\mathbf{0}\wedge\mathbf{y}=\mathbf{0}$, potom rovněž

$$\mathbf{Ax}\neq\mathbf{0}\wedge\mathbf{Ay}\neq\mathbf{0}, \tag{490}$$

neboť operátor **A** zachovává normu a platí

$$[\mathbf{x},\mathbf{y}]=\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\varphi=\|\mathbf{Ax}\|\|\mathbf{Ay}\|\cos\varphi'=[\mathbf{Ax},\mathbf{Ay}], \tag{491}$$

kde φ, resp. φ' je odchylka vektorů $\mathbf{x},\mathbf{y}$ resp. $\mathbf{Ax},\mathbf{Ay}$. Dle definice je operátor **A** tedy vskutku ortonormální.

Druhá věta ortonormality

Čtvercová matice **A** je ortonormální právě tehdy, platí-li rovnost

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}=\mathbf{E} \tag{492}$$

Důkaz

Nechť **A** je maticí lineárního zobrazení $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Potom platí:

$$\begin{gathered}\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n:[\mathbf{x},\mathbf{y}]=[\mathbf{Ax},\mathbf{Ay}]\Leftrightarrow\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n:\mathbf{x}\mathbf{y}^{\mathsf{T}}=\left(\mathbf{A}\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}}\left(\mathbf{A}\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\right)\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n:\mathbf{xE}\mathbf{y}^{\mathsf{T}}=\mathbf{x}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\Leftrightarrow\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n:\mathbf{x}\left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}-\mathbf{E}\right)\mathbf{y}^{\mathsf{T}}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}-\mathbf{E}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}=\mathbf{E}.\end{gathered} \tag{493}$$

Třetí věta ortonormality

Nechť **A** je čtvercová matice. Potom následující tvrzení jsou navzájem ekvivalentní:
a) $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} = \mathbf{E}$, pak **A** je ortonormální matice, jejíž sloupce tvoří ortonormální systém vektorů.
b) $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{-1}$
c) $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{E}$, pak $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ je ortonormální matice, jejíž řádky tvoří ortonormální systém vektorů.

Důkaz

Dokážeme řetězec implikací $\mathrm{a} \Rightarrow \mathrm{b} \Rightarrow \mathrm{c} \Rightarrow \mathrm{a}$:

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} = \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}\mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} =$$
$$= \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^{-1} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{E}\left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} = \mathbf{E}. \tag{494}$$

Čtvrtá věta ortonormality

Buď **A** ortonormální matice. Potom platí rovnost

$$\left|\det \mathbf{A}\right| = 1. \tag{495}$$

Důkaz

$$1 = \det \mathbf{E} = \det\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\right) = \det\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \det^2 \mathbf{A}\,. \tag{496}$$

Pátá věta ortonormality

Nechť H je netriviální Hilbertův prostor konečné dimenze. Nechť dále B a B' jsou jeho dvě báze a nechť **A** je matice přechodu od báze B' k bázi B. Potom platí:

a) Jestliže B a B' jsou ortonormání báze, potom rovněž matice **A** je ortonormální.

b) Jestliže $\mathbf{A}$ je ortonormální matice a jedna z bází B, B' je ortonormální, potom rovněž i druhá z bází je ortonormální.

Důkaz

a) Jsou-li

$$\begin{aligned} B &= \left\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \right\rangle, \\ B' &= \left\langle \mathbf{A}\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{x}_n \right\rangle, \end{aligned} \tag{497}$$

dvě různé ortonormální báze téhož prostoru H, potom platí

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j : \left[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \right] = \left[\mathbf{A}\mathbf{x}_i, \mathbf{A}\mathbf{x}_j \right] = 0. \tag{498}$$

Matice $\mathbf{A}$ je tedy vskutku ortogonální.

b) Je-li např. B ortonormální bází prostoru H, potom

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j : \left[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \right] = 0. \tag{499}$$

Má-li být matice $\mathbf{A}$ ortonormální, musí platit

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j : \left[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \right] = \left[\mathbf{A}\mathbf{x}_i, \mathbf{A}\mathbf{x}_j \right]. \tag{500}$$

Protože $\left[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \right] = 0$, je rovněž $\left[\mathbf{A}\mathbf{x}_i, \mathbf{A}\mathbf{x}_j \right] = 0$. To ovšem znamená ortogonalitu báze B', čímž je věta dokázána.

Šestá věta ortonormality

Automorfismus (izomorfní endomorfismus) $\varphi : E^2 \to E^2$ je buď rotací o vhodný úhel ω, nebo komposicí otočení se zrcadlením.

Důkaz

Pišme

$$\begin{aligned}\varphi\big((1,0)\big)&=(a,c),\\ \varphi\big((0,1)\big)&=(b,d).\end{aligned} \tag{501}$$

Podle definice izomorfismu platí vztahy

$$\begin{aligned}&\|\varphi(\mathbf{x})\|^2=\|\mathbf{x}\|^2\Rightarrow a^2+c^2=1\wedge b^2+d^2=1,\\ &[\mathbf{x},\mathbf{y}]=0\Rightarrow\big[\varphi(\mathbf{x}),\varphi(\mathbf{y})\big]=0\Rightarrow ab+cd=0.\end{aligned} \tag{502}$$

Rovnosti na pravé straně implikací mají řešení

$$\begin{aligned}a&=\cos\alpha,\\ c&=\sin\alpha,\\ b&=-\sin\beta,\\ d&=\cos\beta.\end{aligned} \tag{503}$$

Pak ale

$$-\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha-\beta)=0. \tag{504}$$

Buď je tedy

$$\alpha-\beta=2k\pi, \tag{505}$$

tj.

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}, \tag{506}$$

a jde tedy o rotaci o úhel α, nebo je

$$\alpha - \beta = (2k - 1)\pi \tag{507}$$

a potom

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{508}$$

Příklad 1:

V prostoru E^2 je dán rovnostranný trojúhelník *ABC*, kde

$$\begin{aligned} A &= [-2, -1], \\ B &= [3, 7]. \end{aligned} \tag{509}$$

Užitím operátorového počtu stanovme souřadnice vrcholu *C* tohoto trojúhelníku.

***Řešení*:**

Naším úkolem bude nejprve vyrovnat studovaný útvar vzhledem k ortonormální bázi. Za tím účelem vypočteme úhel pootočení daného trojúhelníku vzhledem této bázi:

$$\varphi = \operatorname{arctan} \frac{7+1}{3+2} = \operatorname{arctan} \frac{8}{5} \approx 58^\circ. \tag{510}$$

Nyní provedeme otočení úsečky *AB* o nalezený úhel φ

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1,908 \\ 1,166 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7,526 \\ 1,166 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{511}$$

Vidíme, že transformovaná úsečka je již rovnoběžná s osou *x*. Vypočteme tedy její střed, který bude zároveň první souřadnicí hledaného transformovaného vrcholu C':

$$c_1' \approx \frac{7{,}526 - 1{,}908}{2} \approx 3{,}003. \qquad (512)$$

Z geometrie úlohy plynou dvě možná řešení pro druhou souřadnici vrcholu C'. Z Pythagorovy věty okamžitě nalézáme tato řešení:

$$c_2' \approx 1{,}166 \pm \sqrt{(7{,}526 + 1{,}908)^2 - (7{,}526 - 3{,}003)^2} \approx \begin{cases} 9{,}445 \\ -7{,}113 \end{cases} \qquad (513)$$

Zpětnou transformací nyní vrátíme nalezený vrchol C' trojúhelníku $A'B'C'$ do původní polohy

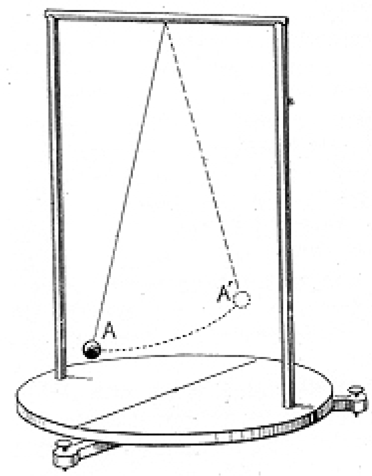
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &\approx \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3{,}003 \\ 9{,}445 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -6{,}418 \\ 7{,}552 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &\approx \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3{,}003 \\ -7{,}113 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7{,}623 \\ -1{,}223 \end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad (514)$$

Máme tak výsledek

$$C \approx \begin{cases} [-6{,}418; 7{,}552] \\ [7{,}623; -1{,}223] \end{cases} \qquad (515)$$

Příklad 2:

Foucaultovo kyvadlo je fyzické kyvadlo, kývající v rotujícím souřadném systému, který se otáčí úhlovou rychlostí ω.



Obr. 2: Princip Foucaultova kyvadla

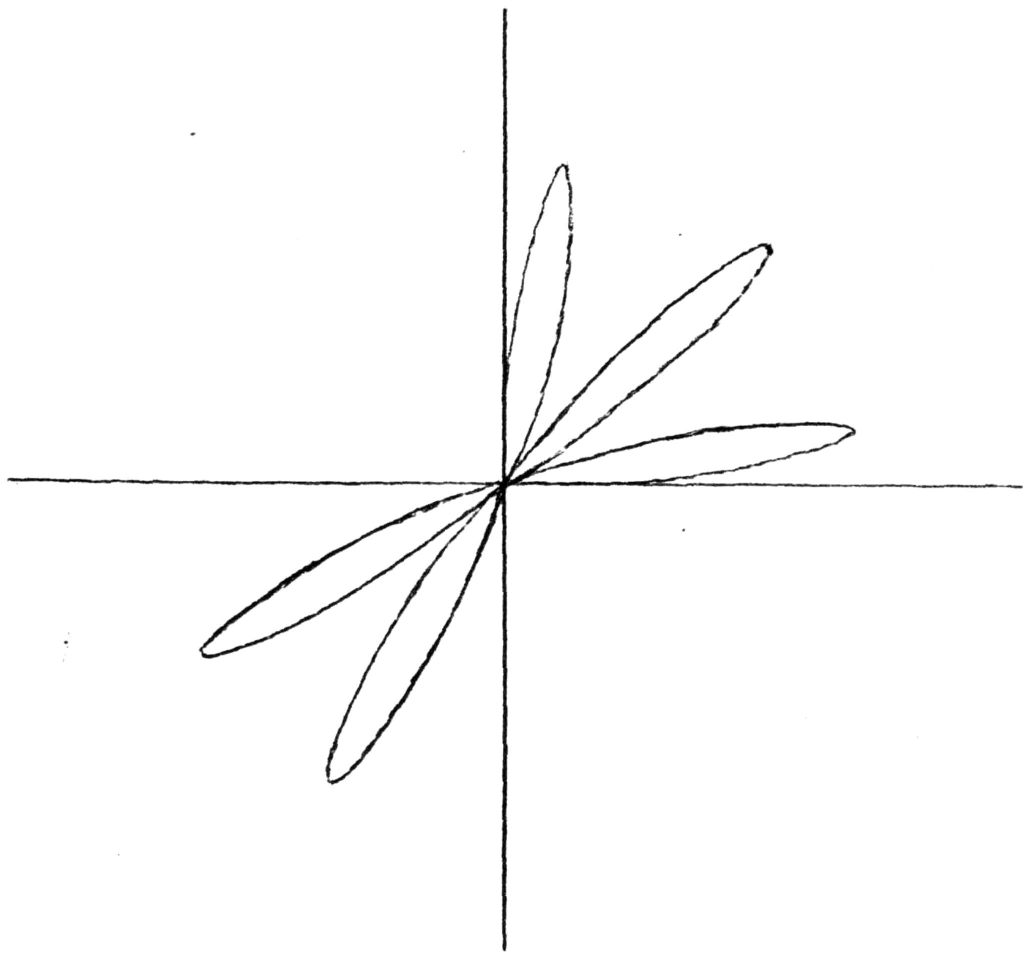
Půdorys trajektorie Foucaultova kyvadla získáme coby komposici rotace a vibrace, tj homomorfismus určený operátorem

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0 \sin\Omega t \\ \varphi_0 \sin\Omega t \end{pmatrix}, \tag{516}$$

kde

$$\Omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}\,. \tag{517}$$

Jean Bernard Léon Foucault (1819 – 1868)



Obr. 3: Půdorys trajektorie Foucaultova kyvadla pro $\omega = 0{,}1 rad \cdot s^{-1}$, $\Omega = 1 s^{-1}$.

Vektorový součin

Veličiny, které mají stejné transformační vlastnosti při rotacích souřadné soustavy, se mohou lišit svými transformačními vlastnostmi vzhledem k operaci zrcadlení os. V souvislosti s tím rozlišujeme dva druhy skalárů a vektorů:

Pravým skalárem rozumíme takovou strukturu, která je invariantní jak při rotacích, tak při zrcadlení souřadných os. Příkladem takové struktury budiž třeba norma vektoru.

Pseudoskalárem nazýváme takovou strukturu, která je invariantní vzhledem k rotaci, avšak při zrcadlení os mění znaménko.

Pravým vektorem nazýváme prvek **v** vektorového prostoru *V*, který se při rotacích a zrcadlení transformuje stejně, jako souřadnice, tj. platí

(392). Speciálně při zrcadlení platí

$$\mathbf{v}'\left(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n\right)=-\mathbf{v}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right). \tag{518}$$

Axiálním vektorem nazýváme prvek **w** vektorového prostoru *V*, který se při rotacích transformuje jako souřadnice, avšak vůči zrcadlení zůstává invariantem, čili

$$\mathbf{w}'\left(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n\right)=\mathbf{w}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right). \tag{519}$$

Název „axiální" souvisí s tím, že ve fyzice takové vektory velmi často souvisejí s veličinami, charakterizujícími rotaci tělesa kolem osy (latinsky axis), jako je např. úhlová rychlost, moment síly, moment hybnosti, magnetická indukce a mnohé jiné.

Snadno se lze přesvědčit, že skalární součin dvou pravých, nebo dvou axiálních vektorů je pravým skalárem, kdežto skalární součin axiálního a pravého vektoru je pseudoskalárem.

Ze dvou pravých vektorů **u**, **v**, lze jednoduše vytvořit axiální vektor **w** prostřednictvím operace

$$\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{v} \tag{520}$$

známé jako ***vektorový součin vektorů* u, v**.
Z komponent u_j, v_k vektorů **u** a **v** lze vytvořit antisymetrický tenzor druhého řádu

$$F_{jk}=u_j v_k-u_k v_j=-F_{kj}. \tag{521}$$

Diagonální komponenty tohoto tenzoru jsou nulové a ze šesti nediagonálních komponent jsou nezávislé 3, za něž vezmeme

$$w_i=e_{ijk}u_j v_k. \tag{522}$$

Snadno se lze přesvědčit, že Levi–Civitův tenzor e_{ijk} je úplně antisymetrickým tenzorem třetího řádu a $u_j v_k$ je tenzorem druhého řádu. Jedná se tedy o dvojí kontrakci tenzoru pátého řádu, která dává tenzor prvního řádu. Předpisem (522) je proto definován vektor, jehož vlastnosti nyní odvodíme.
Z (522) okamžitě plynou vztahy

$$\begin{aligned} u_i w_i &\equiv \mathbf{u}\mathbf{w} = 0, \\ v_i w_i &\equiv \mathbf{v}\mathbf{w} = 0, \end{aligned} \qquad (523)$$

ze kterých okamžitě dostáváme relace ortogonality

$$\begin{aligned} &\mathbf{w} \perp \mathbf{u}, \\ &\mathbf{w} \perp \mathbf{v}. \end{aligned} \qquad (524)$$

Pro kvadrát normy vektoru **w** dostáváme

$$\|\mathbf{w}\|^2 \equiv \sum_{i=1}^{3} w_i^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - \left(u_i v_i\right)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \left(1 - \cos^2 \varphi\right) = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2 \varphi, \qquad (525)$$

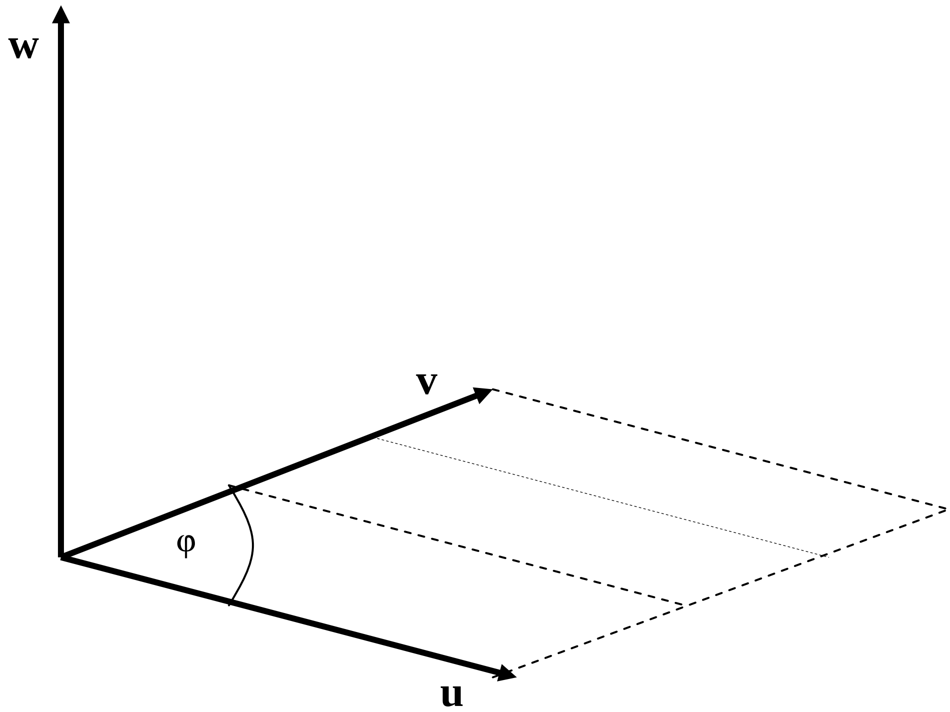
neboli, pro normu samotnou

$$\|\mathbf{w}\| = \|u\| \|v\| \sin \varphi. \qquad (526)$$

V pravotočivé bázi volíme orientaci vektoru **w** tak, aby vektory **u**, **v, w** tvořily pravotočivou bázi.
Z definice (522) rovněž plyne ***antikomutativita vektorového součinu***:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}. \qquad (527)$$

Vektorový součin je roven obsahu plochy rovnoběžníku, vytvořeného vektory **u**, **v**, jeho orientace pak určuje orientaci této plochy (připomínáme, že v geometrii je plocha právě axiálním vektorem).



Obr. 4: vektorový součin $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$

Vyjádříme-li vektory **u**, **v** pomocí kanonické báze

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2, \end{aligned} \qquad (528)$$

tj.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_j \mathbf{e}_j, \\ \mathbf{v} &= v_k \mathbf{e}_k, \end{aligned} \qquad (529)$$

pak za použití distributivity dostaneme

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\mathbf{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\mathbf{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{e}_3, \qquad (530)$$

což je však determinant

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}. \tag{531}$$

Věta

V prostorech s dimenzí $d \neq 3$ nelze zavést vektorový součin

Důkaz

Tenzor (521) má d^2 komponent, z toho d diagonálních je rovno nule a

$$\frac{d(d-1)}{2} \tag{532}$$

nediagonálních komponent je lineárně závislých. Zbývá tedy

$$d^2-d-\frac{d(d-1)}{2}=\frac{d(d-1)}{2} \tag{533}$$

nezávislých komponent. Toto množství však musí být rovno počtu komponent d vektoru. Máme tak rovnici

$$\frac{d(d-1)}{2}=d\,, \tag{534}$$

neboli

$$\frac{d-1}{2}=1, \tag{535}$$

odkud vskutku $d = 3$.

***Příklad 1*:**

Najděme obecný tvar roviny, dané parametricky:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - 3t + s \\ x_2 &= -2 + t - 3s \\ x_3 &= -1 - t - s \end{aligned} \tag{536}$$

***Řešení*:**

Parametrické vyjádření roviny je obecného tvaru

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + u_1 t + v_1 s \\ x_2 &= a_2 + u_2 t + v_2 s \\ x_3 &= a_3 + u_3 t + v_3 s \end{aligned} \tag{537}$$

neboli, v kompaktním vektorovém zápisu

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{u}t + \mathbf{v}s\,. \tag{538}$$

Vektor **a**, nezávislý na parametru, je pouze jedním bodem roviny, zatímco vektory **u**, **v** tvoří její bázi. Normálovým vektorem roviny je tedy vektorový součin

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-4, -4, 8)\,. \tag{539}$$

Odtud plyne rovnice

$$-4x_1 - 4x_2 + 8x_3 + d = 0\,. \tag{540}$$

Za vektor **x** nyní stačí volit libovolný bod roviny, tedy např. bod **a**:

$$(-4)3 - 4(-2) + 8(-1) + d = 0\,, \tag{541}$$

neboli

$$-12+8-8+d=0. \qquad (542)$$

Odtud již plyne hledaná hodnota koeficientu $d=12$ a po vydělení rovnice (540) číslem -4 dostáváme obecné vyjádření zadané roviny

$$x_1+x_2-2x_3-3=0. \qquad (543)$$

***Příklad 2*:**

Najděme průsečnici dvou různoběžných rovin

$$\begin{aligned} p &: 2x_1+5x_2-6x_3+4=0, \\ q &: \qquad\quad 3x_2+3x_3-6=0. \end{aligned} \qquad (544)$$

***Řešení*:**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -6 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad (545)$$

Např. souřadnici x_3 volíme definitoricky rovnu nule. Jednoznačně pak dopočteme $x_2=2$, $x_1=1$. Máme tedy vektory

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (-7,2,0), \\ \mathbf{u} &= (2,5,-6), \\ \mathbf{v} &= (0,3,3). \end{aligned} \qquad (546)$$

Vektorem ortogonálním k normálovým vektorům obou rovin je tedy

$$\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(11,-2,2). \qquad (547)$$

Hledanou průsečnicí obou rovin je tedy přímka s parametrickým vyjádřením

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -7 + 11t \\
x_2 &= 2 - 2t \\
x_3 &= \quad\ 2t
\end{aligned}
\tag{548}
$$

Smíšený součin vektorů

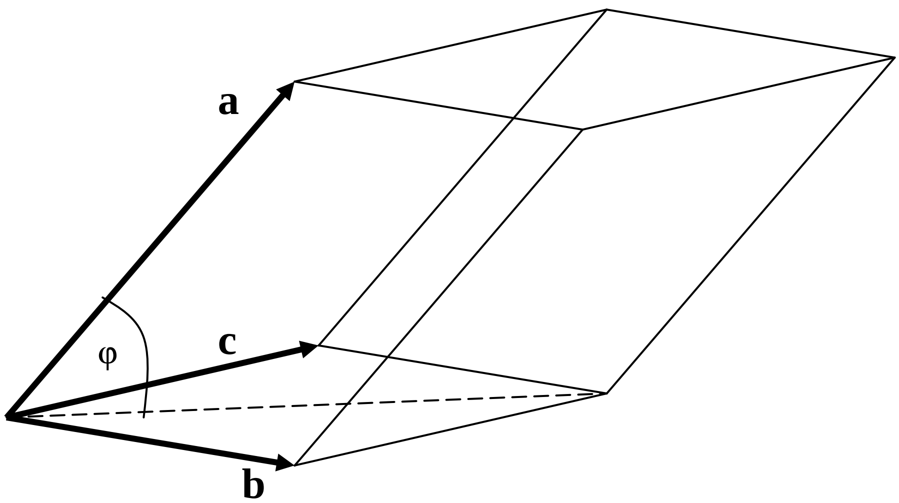
Smíšený součin je definován jako pseudoskalár

$$V = \mathbf{a} \cdot \left[\mathbf{b} \times \mathbf{c}\right]. \tag{549}$$

Jelikož vektorový součin představuje plochu **S** rovnoběžníku orientovanou ve směru normály roviny tvořené vektory **b** a **c**, kdežto skalární součin reprezentuje součin základny a výšky $h = \left\|\mathbf{a}\right\| \cdot \cos\varphi$, máme tak

$$V = \mathbf{a} \cdot \left[\mathbf{b} \times \mathbf{c}\right] = \left\|\mathbf{a}\right\| \cdot \left\|\mathbf{S}\right\| \cdot \cos\varphi \equiv a \cdot S \cdot \cos\varphi, \tag{550}$$

což je objem rovnoběžnostěnu sestaveného z vektorů **a**, **b**, **c**.



Obr. 5: Smíšený součin $\mathbf{a} \cdot \left[\mathbf{b} \times \mathbf{c}\right]$

Explicitní vyjádření smíšeného součinu pomocí komponent a_i, b_j, c_k nalezneme přímo z definice skalárního a vektorového součinu:

$$V = \mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times\mathbf{c}] = e_{ijk}\mathbf{a}_i\mathbf{b}_j\mathbf{c}_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (551)$$

Odtud okamžitě plyne vztah

$$\mathbf{a}[\mathbf{c}\times\mathbf{b}] = \mathbf{b}[\mathbf{a}\times\mathbf{c}] = \mathbf{c}[\mathbf{b}\times\mathbf{a}] = -\mathbf{a}[\mathbf{b}\times\mathbf{c}] = -\mathbf{b}[\mathbf{c}\times\mathbf{a}] = -\mathbf{c}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}] \qquad (552)$$

vyjadřující jednak zachování smíšeného součinu (objemu) při cyklické permutaci jednotlivých vektorů **a**, **b**, **c**, zároveň však také antisymetrii smíšeného součinu vzhledem k záměně pořadí vektorového násobení (obrácení orientace základny).

Dvojný vektorový součin

$$\mathbf{d} = \mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}] = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c} \qquad (553)$$

Důkaz

Rovnost (553) rozepíšeme do složkového tvaru

$$\begin{aligned} d_1 &= a_2(b_2c_1 - b_1c_2)_3 - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)_2 = b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3), \\ d_2 &= a_3(b_2c_3 - b_3c_2)_1 - a_1(b_2c_1 - b_1c_2)_3 = b_2(a_3c_3 + a_1c_1) - c_2(a_3b_3 + a_1b_1), \\ d_3 &= a_1(b_3c_1 - b_1c_3)_2 - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)_1 = b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2). \end{aligned} \qquad (554)$$

V posledním výrazu na pravé straně přičteme a v zápětí opět odečteme

$$\begin{aligned} &a_1b_1c_1, \\ &a_2b_2c_2, \\ &a_3b_3c_3, \end{aligned} \qquad (555)$$

čímž vzniknou skalární součiny **ac**, **ab**, takže máme

$$\begin{aligned} d_1 &= (\mathbf{ac})b_1 - (\mathbf{ab})c_1, \\ d_2 &= (\mathbf{ac})b_2 - (\mathbf{ab})c_2, \\ d_3 &= (\mathbf{ac})b_3 - (\mathbf{ab})c_3, \end{aligned} \qquad (556)$$

což lze vskutku vyjádřit jedinou rovnicí (553).

***Důsledek*:**

Vztah (553) řeší problém rozkladu vektoru **b** do vzájemně ortogonálních podprostorů, z nichž jeden je generován vektorem **a** a druhý vektorem $\mathbf{a}^{\perp}$. Platí:

$$\mathbf{b} = \frac{(\mathbf{ab})\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} + \frac{\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times\mathbf{a}]}{\|\mathbf{a}\|^2}, \qquad (557)$$

kde první člen reprezentuje složku paralelní s **a**, druhý člen složku paralelní s $\mathbf{a}^{\perp}$.

Důkaz

Položíme v (553) **c** = **a** a okamžitě dostáváme

$$\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times\mathbf{a}] = \|\mathbf{a}\|^2\,\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{a}. \qquad (558)$$

Kombinovaný součin vektorů

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}][\mathbf{c}\times\mathbf{d}] = \begin{vmatrix} \mathbf{ac} & \mathbf{ad} \\ \mathbf{bc} & \mathbf{bd} \end{vmatrix} \qquad (559)$$

Důkaz

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}][\mathbf{c}\times\mathbf{d}]=\mathbf{a}\Big[\mathbf{b}\times[\mathbf{c}\times\mathbf{d}]\Big]=\mathbf{a}\Big[\mathbf{c}(\mathbf{bd})-\mathbf{d}(\mathbf{bc})\Big]=(\mathbf{ac})(\mathbf{bd})-(\mathbf{ad})(\mathbf{bc}). \tag{560}$$

Zobecněný vektorový součin

V libovolném prostoru dimenze *N* lze zavést tzv. **zobecněný vektorový součin** *N*-1 vektorů, jehož výsledkem je vektor kolmý na všech *N*-1 vektorů a jeho velikost je určena objemem nadtělesa, jejž tyto vektory definují:

$$\mathbf{v}_1\times\cdots\times\mathbf{v}_{n-1}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_n\\ v_1^1 & \cdots & v_1^n\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ v_{n-1}^1 & \cdots & v_{n-1}^n\end{vmatrix}. \tag{561}$$